

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Fibrados y teorías *Gauge*

Fiber bundles and Gauge theories

Supervisor: Marco Castrillón López

Jaime Redondo Yuste

Doble Grado en Física y Matemáticas

Curso académico 2020-2021

Madrid, 5 de julio de 2021

Resumen:

Las teorías de campos, que se utilizan exitosamente para describir modelos de Física, admiten una formulación elegante y precisa en términos de la teoría de fibrados. En este trabajo se exponen los ingredientes fundamentales de esta construcción: grupos de Lie, fibrados principales y conexiones sobre estos fibrados. Se explicita esta construcción para los lagrangianos de Yang-Mills, derivando sus ecuaciones del movimiento. Por último se da una demostración del Teorema de Utiyama, que garantiza que una teoría invariante *gauge* de primer orden puede depender únicamente de la curvatura. Si además se exige que la teoría respete una cierta invariancia Lorentz, se demuestra que la teoría debe satisfacer las ecuaciones de Yang-Mills.

Abstract:

Field theories, which are used successfully to describe physical models, allow an elegant and precise formulation in terms of fiber bundles theory. In this thesis we present the fundamental ingredients of this construction: Lie groups, principal fiber bundles and connections over these bundles. We explicit the construction for Yang-Mills lagrangians, obtaining its equations of motion. Finally, we prove Utiyama Theorem which guarantees that a first order gauge invariant theory must depend only on the curvature. If we also require a sort of Lorentz invariance we prove that the theory must satisfy Yang-Mills equations.

Índice

1. Introducción	2
2. Preliminares	3
2.1. Grupos de Lie	3
2.2. Fibrados	7
2.3. Conexión en Fibrados Principales	12
3. Teorías de Campos	18
3.1. Definición y Ecuaciones de Euler-Lagrange	18
3.2. Teorías de Yang-Mills	19
4. Caracterización de Lagrangianos	23
4.1. Teorema de Utiyama	23
4.2. Caracterización de Lagrangianos de modelos clásicos	27

1. Introducción

La Física y las Matemáticas guardan una relación especial. A lo largo de la historia los descubrimientos que se realizaban en diferentes ámbitos de la Física han motivado la construcción del cálculo diferencial, la geometría pseudo-riemanniana y más disciplinas matemáticas. Por otro lado las Matemáticas proporcionan un lenguaje en el que la Física puede formular con precisión sus modelos para describir la naturaleza. De hecho, la aparente eficacia del lenguaje matemático aplicado a modelos que describen la naturaleza ha suscitado una abundante discusión sobre la unicidad de estos modelos [14].

Sin embargo, hay casos en los que la comunicación entre ambas disciplinas no ha sido tan fluida. En los años 50 del siglo pasado los físicos estaban desarrollando las teorías de campo de Yang-Mills: modelos con los que se ha conseguido dar cuenta de las interacciones electromagnética, fuerte y débil. Paralelamente los matemáticos estaban avanzando en el estudio de las conexiones sobre un fibrado, en buena medida motivados por la capacidad del fibrado de referencias de resumir toda la geometría de una variedad. Estos dos caminos, que discurrían de forma independiente, tardaron unos 20 años en identificar sus similitudes. Afortunadamente, a partir de ahí y en los años sucesivos, la unión ha sido sorprendentemente fructífera.

Las conexiones sobre fibrados principales proporcionaron el lenguaje apropiado para formular las teorías *gauge*, de las que las teorías de Yang-Mills son un caso particular. Por ejemplo permitió dar una comprensión en términos del grupo de holonomía del efecto Aharonov-Bohm [11]. Por otro lado, las aplicaciones en Física popularizaron el estudio matemático de las teorías *gauge*. El ejemplo más característico de las consecuencias de esta convergencia quizá sean los teoremas de Donaldson sobre variedades diferenciables en 4 dimensiones. Para demostrarlos se basó de modo fundamental en la geometría del espacio de instantones, que son un tipo particular de soluciones de las ecuaciones de Yang-Mills [6]. Este resultado amplió los horizontes de las teorías *gauge* en el ámbito de las matemáticas, que adquirieron un carácter propio y han presentado conexiones interesantes en geometría algebraica, geometría diferencial o sistemas integrables.

Uno de los resultados más interesantes dentro de las teorías *gauge* es el Teorema de Utiyama. Este teorema responde en cierta manera a la pregunta que planteaba Wigner acerca de la unicidad de los modelos físicos. De hecho, garantiza que los lagrangianos que respetan las simetrías internas (*gauge*) de un sistema deben ser funciones de la curvatura. Como se discutirá en este trabajo, añadiendo algunas condiciones adicionales este teorema reduce la clase de lagrangianos admisibles para modelizar sistemas físicos a, esencialmente, los lagrangianos de Yang-Mills. Este será el resultado fundamental que se demostrará en este Trabajo Fin de Grado.

Para comenzar es necesario introducir los conceptos que constituyen el lenguaje con el que se formulan las teorías de campos. En la Sección 2 se introducen en primer lugar algunos elementos de grupos de Lie, poniendo énfasis en la construcción del álgebra de Lie y la relación entre ambos objetos. Seguidamente se define la que será la noción fundamental en este Trabajo: los fibrados sobre variedades diferenciables. Estamos interesados en una clase particular de fibrados: los fibrados principales, de los que se explican sus propiedades fundamentales. Para los fibrados principales se define la noción de conexión, que es un concepto necesario para poder derivar secciones de fibrados y que además será, en los modelos físicos, la realización del campo *gauge*. En la Sección 3 se introducen algunos elementos de cálculo variacional sobre fibrados. Derivamos las ecuaciones de movimiento a partir de un lagrangiano dado y se particulariza para el caso de las teorías de Yang-Mills. Para este caso se obtiene de una manera independiente las ecuaciones de Yang-Mills y demostramos que, para el caso del electromagnetismo, obtenemos las ecuaciones de Maxwell. Por último, en la Sección 4 enunciamos y demostramos el Teorema de Utiyama. Se discuten sus consecuencias demostrando, tal y como se ha avanzado, que es posible reducir aún más la clase de lagrangianos admisibles si se es un poco más exigente en las hipótesis del Teorema de Utiyama.

2. Preliminares

2.1. Grupos de Lie

Un ingrediente esencial de una teoría de campos es su grupo de simetrías, pues éstas permiten entender propiedades esenciales de la teoría. Un sistema presenta una cierta simetría si es invariante bajo la acción de un grupo de Lie. Por lo tanto, para poder estudiar el concepto de simetrías es necesario introducir algunos conceptos básicos sobre grupos y álgebras de Lie. La discusión que se realiza en esta sección está basada principalmente en [10].

Definición 2.1. Un **grupo de Lie** es un grupo (G, \cdot) dotado de una estructura de variedad diferenciable real verificando que el producto $\cdot : G \times G \rightarrow G$ y el inverso $^{-1} : G \rightarrow G$ son aplicaciones diferenciables con la estructura de variedad producto en el primer caso.

En este trabajo se utilizará la palabra diferenciable para referirse a aplicaciones infinitamente derivables, por economía del lenguaje.

Un morfismo de grupos de Lie será una aplicación $f : (G, \cdot) \rightarrow (G', \star)$ diferenciable que satisface $f(g \cdot h) = f(g) \star f(h)$ para cualesquiera $g, h \in G$.

Aunque es posible considerar grupos de Lie discretos, los que tienen un mayor interés para las teorías *gauge* son los grupos no discretos. En este caso, podemos hablar de la dimensión de un grupo de Lie, que es su dimensión como variedad diferenciable real, que asumimos mayor que cero.

Definición 2.2. Un subgrupo $H < G$ de un grupo de Lie G es un **subgrupo de Lie** si es además una subvariedad diferenciable embebida.

Se verifica que todo subgrupo de Lie es cerrado, y recíprocamente, que todo subgrupo cerrado de un grupo de Lie es un subgrupo de Lie (Corolario 1.10.7 de [7]). Utilizando esto, podemos probar el siguiente resultado.

Proposición 2.3. Sea G un grupo de Lie, y sea $U \subset G$ un entorno abierto de 1. Entonces, U genera la componente conexa de la unidad, G_0 .

Demostración. Sea H el subgrupo generado por U . Como U es un abierto topológico, el subgrupo que genera será también un abierto en G . Por lo tanto, H es una subvariedad diferenciable embebida, luego también es un subgrupo de Lie. Además, todo subgrupo de Lie es cerrado dentro de un grupo de Lie, luego H es simultáneamente abierto y cerrado, y además $1 \in H$, luego $H = G_0$. \square

Nótese que si G es conexo, tiene una única componente conexa, luego es generado por cualquier entorno abierto de la unidad. Para una variedad diferenciable, su espacio tangente en un punto, $T_g G$ se puede entender como su aproximación lineal de la propia variedad en ese punto. La proposición anterior nos indica que puede ser posible, de cierta manera, recuperar toda la información del grupo de Lie a través de su comportamiento local cerca de la identidad.

Definición 2.4. Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g} = T_1 G$. Dado un $A \in \mathfrak{g}$ definimos el subgrupo uniparamétrico asociado a A como el morfismo de grupos de Lie $\gamma_A : \mathbb{R} \rightarrow G$ verificando $\dot{\gamma}_A(0) = A$. Definimos la aplicación **exponencial** como

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ A &\mapsto \gamma_A(1). \end{aligned}$$

La comprobación de que el subgrupo uniparamétrico está bien definido es directa. En el caso más sencillo, si $G = \mathbb{R}$, evidentemente $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$. Dado un $A \in \mathfrak{g}$ se debe verificar $\gamma_A(t) = tA$, y por tanto la aplicación exponencial es la identidad, $\exp(A) = A$. Sin embargo, cuando $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$

es la circunferencia se tiene que $\exp(A) = A \bmod \mathbb{Z} = e^{2\pi i A}$ para cualquier $A \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}$. Un último caso práctico es cuando $G < GL(n, \mathbb{K})$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}) es un grupo de matrices. En ese caso, la exponencial así definida coincide con la exponencial de matrices, $\exp(A) = e^A$.

Teorema 2.5. La aplicación exponencial es un difeomorfismo entre un entorno abierto del $0 \in \mathfrak{g}$ y un entorno abierto de $1 \in G$.

Demostración. Es diferenciable por construcción, luego basta comprobar que su derivada en el 0 no se anula. Pero $\exp(0) = \gamma_0(1) = 1$, porque γ_0 siempre será la curva constante. Entonces su diferencial es $\exp_*(0)(x) = \dot{\gamma}_x(0) = x$, es decir, $\exp_* = id$, luego por el Teorema de la Función Inversa se sigue el resultado. \square

Este Teorema es muy importante pese a su simplicidad, pues de acuerdo con la Prop. 2.3 significa que se puede generar todo un grupo de Lie a partir de un entorno abierto de \mathfrak{g} que contenga al cero. A los elementos de una base de \mathfrak{g} se les conoce también como generadores infinitesimales del grupo, pues cualquier elemento del grupo se puede escribir a partir de estos utilizando la aplicación exponencial.

Por ser un espacio tangente, \mathfrak{g} tiene estructura de espacio vectorial. Se le puede dotar de una operación interna, que es conocida como corchete (también se utiliza a veces conmutador), que le dota de la estructura de álgebra. Para ello, se observa que el producto de dos exponenciales no verifica, en general $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$. Por tanto, sea $\mu : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ la aplicación tal que $\exp(A)\exp(B) = \exp(\mu(A, B))$, para (A, B) en un cierto entorno de $(0, 0)$, tan pequeño como sea necesario.

Lema 2.6. La serie de Taylor alrededor del origen de la aplicación $\mu(A, B)$ viene dada por

$$\mu(A, B) = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \dots,$$

donde $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es una aplicación bilineal y antisimétrica.

Demostración. Si se toma $B = 0$, se tiene que $\mu(A, 0) = A$, luego el término lineal en A es la identidad y no hay término cuadrático en A . Intercambiando A por B , se tiene que el único término cuadrático permitido es una aplicación bilineal que denotamos $[A, B]$. Para comprobar la antisimetría basta observar que $[A, A] = 0$. \square

A esta aplicación se la denomina corchete. Si $G < GL(n, \mathbb{K})$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}) es un grupo de matrices se puede probar utilizando las propiedades de la exponencial de matrices que $[A, B] = AB - BA$, es decir, el corchete es el conmutador de matrices. Se comprueba de manera directa que el par $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ es un álgebra. Un álgebra se dice que es de Lie si además verifica la identidad de Jacobi, es decir,

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0, \quad \forall A, B, C \in \mathfrak{g}. \quad (1)$$

Para comprobar que $\mathfrak{g} = T_1G$ es un álgebra de Lie, es conveniente introducir la acción adjunta. El concepto de acción es uno de los más importantes para este trabajo. Formalmente,

Definición 2.7. Una **acción** de un grupo de Lie G en una variedad diferenciable M es una regla que asigna a cada $g \in G$ un difeomorfismo $\rho(g) \in \text{Diff}(M)$ verificando:

1. $\rho(1) = id_M$.
2. $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ para cualesquiera $g, h \in G$.

3. La aplicación $G \times M \rightarrow M$ que asigna $(g, m) \mapsto \rho(g)m$ es diferenciable.

Un caso paradigmático es la acción del grupo de aplicaciones lineales $GL(n, \mathbb{R})$, que es un grupo de Lie, sobre \mathbb{R}^n , que actúa sobre vectores como matrices de la forma habitual en álgebra lineal. Además, un grupo siempre puede actuar sobre sí mismo de dos maneras diferentes: por la derecha, R_g , o por la izquierda, L_g . En este último caso la acción se define por

$$L_g : G \rightarrow G, \quad L_g(h) = gh,$$

y similarmente para la acción por la derecha. Estas acciones se pueden extender de forma natural para actuar sobre funciones o campos tensoriales sobre G . Un caso de particular interés es el de la acción inducida en el espacio tangente al grupo. Si $v \in T_m G$, se define la acción por la izquierda como $g.v = (L_g)_* v$, y un campo vectorial X se dice que es invariante por la izquierda si $g.X = X, \forall g \in G$.

Una acción es libre si $\rho(g)(x) = x$ implica $g = 1$. La órbita de un punto $x \in M$ es el subgrupo de G generado por las imágenes de x por la acción de cualquier elemento del grupo, es decir:

$$\text{Orb}(x) = \{\rho(g)(x) : g \in G\}.$$

Además de las acciones por la derecha y por la izquierda, siempre se puede definir una tercera acción de un grupo sobre sí mismo, que es la conjugación. Esta acción será importante para demostrar que \mathfrak{g} es un álgebra de Lie. Se define como

$$c_g : G \rightarrow G, \quad c_g(h) = ghg^{-1},$$

es decir, $c_g = L_g \circ R_g$. Esta aplicación define un endomorfismo lineal del álgebra de Lie, $\text{Ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ como $\text{Ad}_g(A) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} c_g(\exp(tA)) = (c_g)_*(A)$. De esta manera, se tiene una aplicación

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G &\rightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto \text{Ad}_g, \end{aligned}$$

que relaciona cada elemento del grupo con una transformación lineal del álgebra. De la misma manera que antes, de esa aplicación se obtiene $\text{ad} = \text{Ad}_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ una aplicación que asocia a cada elemento del álgebra una transformación lineal del propio álgebra. Esta aplicación se denomina adjunta y verifica las siguientes propiedades.

Lema 2.8. La aplicación adjunta $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ verifica para cualesquiera $A, B \in \mathfrak{g}$:

1. $\text{ad}_A B = [A, B]$
2. $\text{Ad}(\exp(A)) = \exp(\text{ad}_A)$, vistos como operadores $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$.

Demostración. La acción adjunta se puede calcular como

$$\text{Ad}_g A = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g \exp(tA) g^{-1}.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \text{ad}_A B &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(sA) \exp(tB) \exp(-sA) = \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tB + ts[A, B] + \dots) = [A, B]. \end{aligned}$$

Lo que prueba la primera parte. Para la segunda parte, se observa que si $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ es un morfismo de grupos de Lie, entonces $\exp(\varphi_*(A)) = \varphi(\exp(A))$ cuando $A \in \mathfrak{g}_1$. En efecto, $\varphi(\exp(tA))$ es un subgrupo uniparamétrico en G_2 que tiene $\varphi_*(A)$ por derivada en el cero, pero como para esas condiciones el subgrupo uniparamétrico es único, debe ser exactamente $\exp(\varphi_*(A))$. Para el caso particular $\varphi(h) = ghg^{-1}$ de la acción adjunta, esto significa que

$$g \exp(A) g^{-1} = \exp(\text{Ad}_g A), \implies \text{Ad}(\exp(A)) = \exp(\text{ad}_A).$$

□

Este resultado es el último ingrediente necesario para probar el siguiente teorema.

Teorema 2.9. Sea G un grupo de Lie. El par $(\mathfrak{g} = T_1G, [,])$ con el corchete definido por el Lema 2.6 es un álgebra de Lie, a la que denotaremos por $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$.

Demostración. Basta probar que satisface la identidad de Jacobi. Utilizando que $\text{ad}_A B = [A, B]$, se puede comprobar que la siguiente expresión es equivalente a la identidad de Jacobi:

$$\text{ad}[A, B] = \text{ad}A \circ \text{ad}B - \text{ad}B \circ \text{ad}A.$$

Para comprobar esta identidad, observamos que $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ es un morfismo de grupos de Lie. Como todo morfismo de grupos de Lie conmuta con la aplicación exponencial, la aplicación que induce sobre el álgebra, $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ debe preservar el corchete, esto es, $\text{ad}[A, B] = [\text{ad}A, \text{ad}B]$. Pero el corchete en $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es precisamente el conmutador, $[\text{ad}A, \text{ad}B] = \text{ad}A \circ \text{ad}B - \text{ad}B \circ \text{ad}A$ pues es un grupo de matrices, de lo que se sigue la identidad que queríamos comprobar. □

Observación 2.10. Hay un isomorfismo que relaciona cada elemento del álgebra de Lie \mathfrak{g} con un campo vectorial de G (un elemento de $\mathfrak{X}(G)$) que es invariante por la acción por la izquierda del grupo. Esencialmente, se comprueba que para cada $A \in \mathfrak{g}$, el campo vectorial $\xi = L_*(A)$ es invariante por la izquierda. Recíprocamente, un campo vectorial ξ define inmediatamente un elemento del álgebra mediante $A = \xi(1)$. Se comprueba que la construcción que se ha realizado aquí del corchete es equivalente a la construcción del corchete de dos campos vectoriales ξ, η en términos del desplazamiento que se sufre al seguir el lazo cerrado que definen sus flujos, esto es, $\Phi_\xi^t \Phi_\eta^s \Phi_{-\xi}^t \Phi_{-\eta}^s = \Phi_{[\xi, \eta]}^{ts} + \dots$. De hecho, en muchos textos esta es la definición que se da de corchete.

En resumidas cuentas, un grupo de Lie es un grupo que además admite una estructura de variedad diferenciable. Esta estructura permite generar todo el grupo a partir de un entorno de la identidad, lo cual motiva la construcción del álgebra de Lie asociada, a través de la aplicación exponencial. Además, el grupo puede actuar sobre variedades cualesquiera de forma diferenciable. Esto será importante posteriormente, pues el concepto de simetría se traducirá como invariancia bajo la acción del grupo.

Ejemplo 2.11 (El grupo $U(1)$). Este grupo es uno de los grupos de Lie más sencillos que se puede tratar, pero a su vez es físicamente relevante pues es el grupo de simetrías internas del electromagnetismo. Los grupos unitarios $U(n)$ se definen en general como

$$U(n) = \{g \in GL(n; \mathbb{C}) : g\bar{g}^T = Id_n\},$$

donde \bar{g}^T es el hermítico conjugado de la matriz g , es decir el complejo conjugado de la matriz transpuesta. Para el caso $U(1)$, las matrices son números complejos que verifican $z\bar{z} = 1$, es decir, $U(1) \simeq S^1$ la circunferencia. Por tanto, el álgebra de Lie asociada es $u(1) = \mathbb{R}$, con la estructura de grupo habitual. El hecho que $u(1)$ sea conmutativo será importante posteriormente y no es algo que ocurra con generalidad.

Ejemplo 2.12 (El grupo $SU(2)$). . Otro caso que será importante más adelante es el grupo $SU(2)$ de matrices unitarias y especiales, es decir, matrices de $U(2)$ con determinante unidad. Se observa que se puede escribir

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\},$$

por lo cual $SU(2) \simeq S^3$. El espacio tangente a la identidad es el conjunto de las matrices complejas 2×2 antihermíticas. Un sistema de generadores es, por ejemplo, el siguiente:

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Desde el punto de vista diferenciable, por el isomorfismo con S^3 , se sigue que el álgebra de Lie es $su(2) \simeq \mathbb{R}^3$. No obstante, la estructura de álgebra de \mathbb{R}^3 en este caso no es trivial. De hecho, el corchete es precisamente el producto vectorial en \mathbb{R}^3 .

$$[A, B] = A \times B.$$

Equivalentemente, las constantes de estructura, que se definen como los números c_{ij}^k tales que dado un sistema de generadores, $[T_i, T_j] = c_{ij}^k T_k$ son $c_{ij}^k = \epsilon_{ijk}$ el símbolo de Levi-Civita, que es el tensor completamente antisimétrico con $\epsilon_{123} = 1$. Físicamente, este es el grupo que describe la interacción débil, que es el ejemplo más sencillo de una teoría de campos no abeliana [11].

Una última observación interesante es la relación entre $SU(2)$ con el grupo de isometrías espaciales $SO(3)$. Los generadores de $SO(3)$ son las matrices completamente antisimétricas, y se comprueba que sus constantes de estructura son también $c_{ij}^k = \epsilon_{ijk}$. Esto permite construir un isomorfismo entre $su(2) \simeq so(3)$. Es importante notar que esto no significa que los grupos de Lie sean isomorfos. De hecho, el grupo $SU(2)$ es un recubridor (2:1) del grupo $SO(3)$, obtenido por la identificación antipodal viendo $SU(2)$ como la 3-esfera. Esta identificación permite entender el grupo de isometrías espaciales como $\mathbb{R}P^3$, el espacio proyectivo de dimensión 3.

2.2. Fibrados

Dada una variedad diferenciable M , podemos asignar a cada punto un espacio vectorial, que es su espacio tangente $T_x M$. Si consideramos la unión de los espacios tangentes a cada punto de la variedad, obtenemos un espacio, TM , que se proyecta naturalmente sobre la variedad M por medio de la aplicación $p : TM \rightarrow M$ que asigna $p(v) = x$ cuando $v \in T_x M$. El espacio TM ejemplifica la estructura de fibrado: se tiene una variedad base, y para cada punto de la base, hay una “fibra” $p^{-1}(x) = T_x M$, y que además se puede comprobar que localmente (en un cierto abierto coordenado), la proyección p es un difeomorfismo. Por eso al espacio TM se le denomina fibrado tangente.

La estructura que proporcionan los fibrados es propicia para modelar las teorías de campos *gauge* o con simetrías internas. De hecho, como luego se justificará, las magnitudes físicas se relacionan directamente con secciones de un fibrado. En esta sección se definirá con precisión lo que es un fibrado, particularizando al estudio de los fibrados principales, que serán los más interesantes pues sus fibras se pueden dotar de una estructura de grupo de Lie, que nos permite dar cuenta de la simetría que queremos modelizar. La discusión realizada en esta sección está basada principalmente en [3].

Definición 2.13. Un **fibrado** con fibra F sobre una variedad diferenciable es una 4-upla (E, B, p, F) , con una aplicación llamada proyección $p : E \rightarrow B$ que va desde el espacio total E hasta el espacio base B , que verifica que para cada $x \in B$, existe un entorno $U^x \subset B$ y un difeomorfismo $\varphi_U : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$, que se denomina trivialización, tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
\varphi_U : p^{-1}(U) & \xrightarrow{\cong} & U \times F \\
\downarrow p & & \downarrow \pi_1 \\
U & \xrightarrow{=} & U.
\end{array}$$

Los fibrados que globalmente son espacios producto, se denominan triviales. Un ejemplo sencillo de fibrado no trivial es la banda de Möbius sobre la circunferencia. Se puede dar de una manera sencilla una parametrización de este fibrado embebido en \mathbb{R}^3 . Consideramos la circunferencia $S^1 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$. La banda de Möbius es el subespacio parametrizado como

$$\sigma(t, \theta) = ((1 - t \sin(\theta/2)) \cos \theta, (1 - t \sin(\theta/2)) \sin \theta, t \cos(\theta/2)), \quad -1/2 < t < 1/2, 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (2)$$

La proyección actúa sobre la parametrización como $p : \sigma(t, \theta) \mapsto \sigma(0, \theta)$.

Las trivializaciones se comportan de un modo similar a las cartas en variedades diferenciables. Dados dos abiertos trivializables (U, φ_U) y (V, φ_V) , se puede construir

$$\begin{aligned}
\varphi_{UV} &= \varphi_V \circ \varphi_U^{-1} : (U \cap V) \times F \rightarrow (U \cap V) \times F \\
&(x, y) \mapsto (x, \tilde{\varphi}_{UV}(x, y)),
\end{aligned}$$

el cambio de trivialización en la intersección. Es más habitual tratar con las funciones de transición

$$\begin{aligned}
g_{UV} &: U \cap V \rightarrow \text{Homeo}(F) \\
&x \rightarrow \tilde{\varphi}_{UV}(x, \cdot),
\end{aligned}$$

que asignan a cada punto de la intersección un homeomorfismo de la fibra.

Observación 2.14. En todos los casos que consideramos, tanto el espacio base como el fibrado son variedades diferenciables. Por tanto, el espacio base es localmente difeomorfo a \mathbb{R}^n , por lo que es, en particular, localmente simplemente conexo. Esta condición nos garantiza que podemos reconstruir un fibrado sobre una variedad fija B y con una fibra F a partir de dos ingredientes: una partición de abiertos trivializables simplemente conexos, y unas funciones de transición definidas en esos abiertos (ver sección 3 en [12]).

Definición 2.15. Un **morfismo** entre fibrados (E', B', p', F') y (E, B, p, F) es un par (f, \tilde{f}) de difeomorfismos $f \in \text{Diff}(E', E)$ y $\tilde{f} \in \text{Diff}(B', B)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
E' & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\
\downarrow p' & & \downarrow p \\
B' & \xrightarrow{f} & B.
\end{array}$$

Un caso particular son los morfismos verticales. Un morfismo se dice que es vertical si $B' = B$ y $f = id_B$. En ese caso, el morfismo actúa únicamente desplazando “verticalmente” las fibras punto a punto.

Dada una aplicación diferenciable $f : B' \rightarrow B$ y un fibrado E sobre B se define el pullback de E por f como:

$$f^*E = \{(x', e) \in B' \times E : f(x') = p(e)\}$$

con la proyección $p' : f^*E \rightarrow B'$ que lleva $p'(x', e) = x'$. De este modo, si $A \subset B$ y $E \xrightarrow{p} B$ es un fibrado, se define la restricción de E a A como $E|_A = i^*E$, donde $i : A \hookrightarrow B$ es la inclusión.

Definición 2.16. Sea $p : E \rightarrow B$ un fibrado. Una **sección** es una aplicación $s : B \rightarrow E$ diferenciable tal que $p \circ s = Id_B$. El espacio de secciones en un fibrado se denota por $\Gamma(E)$. Dado un cierto subconjunto $U \subset B$, se denota por $\Gamma(U, E)$ al conjunto $\Gamma(E|_U)$.

Hay diferentes tipos de fibrados que se obtienen al requerir algún tipo de estructura adicional. Un caso importante son los fibrados vectoriales, que son fibrados cuya fibra es un espacio vectorial y sus funciones de transición son aplicaciones lineales sobre esa fibra. Para este trabajo estamos interesados en estudiar los fibrados principales.

Definición 2.17. Sea G un grupo de Lie. Un G -fibrado principal es una submersión sobreyectiva $p : P \rightarrow B$ tal que el grupo G actúa libremente sobre P por la derecha y $Orb(y) \simeq p^{-1}(p(y))$ para cada $y \in P$. Equivalentemente, las funciones de transición del fibrado son multiplicaciones por la izquierda $L(G) = \{L_g : G \rightarrow G | g \in G\}$.

Esta definición puede parecer un tanto abstracta y de hecho no demuestra aparentemente que el objeto construido es un fibrado de acuerdo con la Definición 2.13. No obstante, la imagen que proporciona es la más ilustrativa. Dado un punto cualquiera de la base, $x \in B$, fijemos un punto $y \in p^{-1}(x)$. La fibra viene dada por la órbita por la acción de G de este punto y . Dicho de otro modo, si decretamos que $y \mapsto 1$, se tiene un difeomorfismo entre la fibra y el grupo, que asigna a $y.g \in Orb(y) = p^{-1}(x) \mapsto g \in G$. Por tanto, el fibrado principal no es exactamente el fibrado que tiene por tipo de fibra el grupo G , sino que cada fibra se puede dotar de la estructura de grupo de G fijando un punto en ella. Veamos que efectivamente es un fibrado.

Proposición 2.18. Un objeto como el de la Definición 2.17 es un fibrado.

Demostración. Es necesario comprobar que se pueden encontrar trivializaciones locales. Sea $x \in B$, $y \in p^{-1}(x)$. Como p es una submersión, hay una sección local $s : U^x \rightarrow P$, donde U^x es un entorno abierto de x , que verifica $s(x) = y$. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : U^x \times G &\rightarrow p^{-1}(U^x) \\ (x, g) &\mapsto s(x).g, \end{aligned}$$

que es diferenciable. Además, es inyectiva. En efecto, sea $\phi(x, g) = \phi(x', g')$. Esto implica que $s(x).g \in Orb(s(x)) \simeq p^{-1}(p(s(x)))$. Por tanto, $p(s(x).g) = x$. Esto significa que la condición $s(x).g = s(x').g'$ implica que $x = x'$. Además, el hecho de que la acción sea libre, implica que $g = g'$, por lo que se tiene la inyectividad.

Para ver la sobreyectividad, tómesese un $y \in p^{-1}(U^x)$. Se tiene que $s(p(y)) \in Orb(y)$, luego existe un $g \in G$ que verifica que $s(p(y)).g = y = \phi(p(y), g)$.

Por último, comprobemos que es un difeomorfismo. Para ello basta comprobar la sobreyectividad de $d\phi : T_{(x,e)}(U^x \times G) \rightarrow T_y P$. Consideremos la secuencia exacta

$$0 \rightarrow T_y Orb \rightarrow T_y P \xrightarrow{p_*} T_x B \rightarrow 0,$$

y la escisión $s_* : T_x B \rightarrow T_y P$. Se tiene como consecuencia que $T_y P = T_y Orb \times T_x B$, pero esto es exactamente $T_{(x,e)}(U^x \times G)$. \square

Observación 2.19. Si un fibrado principal $P \rightarrow B$ tiene una sección global $s : B \rightarrow P$ entonces el fibrado es trivial, $P \simeq B \times G$. Para ello basta construir una trivialización global a partir de la sección del mismo modo que en la demostración anterior.

Ejemplo 2.20. El recubridor universal \tilde{B} de una variedad B es un fibrado principal con grupo de estructura $G = \pi_1(B)$. En este caso, la acción del grupo se define de la siguiente manera. Sea $x \in B$

un punto de la variedad base e $y \in p^{-1}(x)$ un punto de la fibra. Dado un $g \in G$, este elemento del grupo se realiza como un camino $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ (elegimos un representante cualquiera de la clase de homotopía) con punto base x . Tomamos la elevación de g a \tilde{B} con origen y , que denotamos por $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{B}$. Entonces, definimos la acción de g sobre el punto $y \in \tilde{B}$ por $y.g = \tilde{\gamma}(1)$. Se puede comprobar directamente que la acción así definida es libre.

Definición 2.21. Un **morfismo** entre fibrados principales P, P' es un morfismo entre fibrados $\Phi : P \rightarrow P'$ y un homomorfismo de grupos de Lie $\gamma : G \rightarrow G'$ verificando

$$\Phi(y.g) = \Phi(y).\gamma(g), \quad \forall y \in P, \forall g \in G.$$

A partir de un fibrado principal se pueden construir toda una serie de fibrados relacionados. Por ejemplo, para cada subgrupo de Lie se puede construir un fibrado que tiene a este por grupo asociado.

Definición 2.22. Sea P un G -fibrado principal, y sea H un subgrupo de Lie de G . Una **reducción** es un subconjunto $R \subset P$ tal que $\pi|_R : R \rightarrow B$ es un H -fibrado principal e $i : R \hookrightarrow P$ es un morfismo de fibrados principales, con morfismo de grupos de Lie asociado γ la inclusión de H en G .

Paralelamente, si G actúa sobre otra variedad F , se puede construir un fibrado que tiene por tipo de fibra F .

Definición 2.23. Sea P un G -fibrado principal, donde G actúa por la izquierda sobre F . El **fibrado asociado** es el fibrado que denotamos por $P \times_G F := (P \times F)/G \rightarrow B$, donde se toma el cociente por la relación de equivalencia generada por

$$(y, f) \simeq (y.g, g^{-1}.f), \quad \forall g \in G,$$

y la proyección actúa como $p_F : [(y, f)]_G \mapsto p(y)$.

Así, se construye un fibrado que tiene por tipo de fibra F . En el caso trivial, $F = \{1\}$, se tiene que el fibrado asociado es $P \times_G F = P/G = B$. Otro ejemplo viene dado por la frontera de la banda de Möbius $P = \partial M^1$, entendida como la frontera del subespacio embebido en \mathbb{R}^3 definido en (2). Si tomamos $F = (-1, 1)$, donde \mathbb{Z}_2 actúa por $g(f) = gf$, el fibrado asociado $\partial M^1 \times_{\mathbb{Z}_2} F = M^1 \rightarrow S^1$ es precisamente la banda de Möbius.

Observación 2.24. Se puede demostrar que para un cierto subgrupo de Lie $H < G$, las reducciones a un H -fibrado principal están en biyección con las secciones globales del fibrado asociado $P \times_G (G/H)$, donde la acción de G sobre G/H viene dada por $g.[g']_H = [gg']_H$.

El lenguaje de fibrados principales es el más apropiado para definir el concepto de transformación *gauge* desde el punto de vista matemático. Las transformaciones *gauge* son un caso particular de automorfismos de un fibrado principal.

Definición 2.25. Sea $P \rightarrow B$ un G -fibrado principal. Un **automorfismo** de P es un difeomorfismo $\Phi : P \rightarrow P$ tal que $\Phi(y.g) = \phi(y).g$ para todo $y \in P$ y todo $g \in G$. Al conjunto de automorfismos de un fibrado P se le denota por $\text{Aut}(P)$.

Es decir, los automorfismos son los morfismos de fibrados principales con morfismo de grupos de Lie asociado la identidad. Cada automorfismo induce un difeomorfismo en B , $\phi : B \rightarrow B$, dado por $p \circ \Phi = \phi \circ p$.

Definición 2.26. Una **transformación gauge** es un automorfismo tal que el difeomorfismo inducido en B es la identidad. Al conjunto de transformaciones *gauge* de un fibrado P se le denota por $\text{Gau}(P)$.

Una transformación *gauge* deja invariante el espacio base. Para un punto fijo del espacio base, mueve cada punto de la fibra verticalmente, es decir, dentro de la misma fibra. La relación con el concepto físico de transformación *gauge* es directa. En el modo más sencillo de verlo, el espacio base es sencillamente la región del espacio que se considera en un cierto modelo físico, que podemos suponer por simplicidad que es \mathbb{R}^3 . Una variable del modelo viene dada por una sección del fibrado principal $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow P$. Una transformación *gauge*, entonces, cambiará el valor de la sección, pero nunca va a cambiar el valor de $p \circ s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Esto se traduce en que una transformación *gauge* afecta únicamente a los grados de libertad internos del modelo.

Localmente, una transformación *gauge* $\Phi \in \text{Gau}(P)$ lleva:

$$\begin{aligned}\Phi : U \times G &\rightarrow U \times G \\ (x, h) &\mapsto (x, \xi(x).h),\end{aligned}$$

donde $\xi : U \rightarrow G$, de modo que localmente $\text{Gau}(P|_U) \simeq C^\infty(U, G)$.

Proposición 2.27. Hay una biyección entre $\text{Gau}(P)$ y las secciones de $\text{Ad}(P) = P \times_G G$, el fibrado asociado dado por la acción conjugada $c_g h = g.h = ghg^{-1}$.

Demostración. Sea $\Phi \in \text{Gau}(P)$. A partir de ella definimos la sección

$$\begin{aligned}s : B &\rightarrow \text{Ad}(P) \\ x &\mapsto [(y, h)]_G,\end{aligned}$$

donde $p(y) = x$ y $\Phi(y) = y.h$. Para ver que está bien definida, tomemos $y' = y.g$. Entonces $\Phi(y') = y.hg = y.gg^{-1}hg = y'.g^{-1}hg$. Por tanto

$$[(y', g^{-1}hg)]_G = [(y.g, g^{-1}hg)]_G = [(y, h)]_G.$$

Recíprocamente, dada la sección $s : B \rightarrow \text{Ad}(P)$, basta tomar la transformación *gauge* dada por $\Phi(y) = y.h$, donde $h \in G$ es tal que

$$s(p(y)) = [(y, h)]_G.$$

□

Esta caracterización de las transformaciones *gauge* podrá ser útil posteriormente. Un ejemplo muy ilustrativo de fibrado principal es el siguiente:

Ejemplo 2.28 (El fibrado de referencias $L(B)$). Sea B una variedad. Consideramos el fibrado $L(B)$, formado por todas las bases de vectores tangentes en cada punto del espacio base B . La proyección viene dada por:

$$\begin{aligned}p : L(B) &\rightarrow B, \\ y &\mapsto x, \quad y = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}, \quad \vec{v}_i \in T_x B, \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

El grupo de Lie asociado es el grupo de transformaciones lineales $GL(n, \mathbb{R})$. Su acción es la multiplicación matricial, es decir, si $y = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ y para un $g = (g_i^j) \in GL(n, \mathbb{R})$, se toma

$$y.g = \{\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_n\}, \quad \vec{v}'_i = g_i^j \vec{v}_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Estos fibrados engloban la información geométrica de B . Un caso que ilustra esta afirmación es el de las variedades Riemannianas. Se demuestra que hay una biyección entre las métricas en la

variedad base B y las $O(n)$ -reducciones de $L(B)$. La reducción, si (B, g) es Riemanniana viene dada por

$$O(B) = \{y \in L(B) : y \text{ ortonormal respecto a } g\}.$$

Recíprocamente, dada una $O(n)$ -reducción $R \rightarrow B$, se tiene que la métrica en cada punto $x \in B$ es la forma bilineal dada por la matriz identidad, escrita con respecto a cada base de la fibra $p^{-1}(x) \in R$. Se dice en general, cuando G es un subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$, que una G -reducción de $L(B) \rightarrow B$ es una G -estructura. Por ejemplo, las $SO(n)$ -estructuras están en biyección con las variedades riemannianas orientadas.

Por último, se ve que una transformación *gauge* del fibrado de referencias es sencillamente un cambio de base que depende del punto.

2.3. Conexión en Fibrados Principales

A la hora de estudiar una teoría de campos es imprescindible tener una noción de derivada. Hemos visto que los fibrados principales tienen ciertas propiedades que los hacen especialmente propicios para modelizar teorías *gauge*, por lo tanto, vamos a estudiar cómo se puede definir una derivada para una sección de un fibrado principal y sus fibrados asociados. A primera vista, se puede utilizar una expresión local en un abierto trivializable para la sección, de modo que su composición con una trivialización nos da una aplicación del espacio base en sí mismo, que se podría derivar con la derivada del espacio base. No obstante, esta construcción no es independiente de la trivialización escogida: hay trivializaciones en las que, de acuerdo con esta construcción, $ds(x_0) = 0$ mientras que en otras trivializaciones $ds(x_0) \neq 0$. Esto se puede interpretar como que no hay una noción global sobre qué es horizontal en un fibrado principal. La discusión de esta sección se basa en [3].

Definición 2.29. Sea $p : P \rightarrow B$ un G -fibrado principal. Se dan 3 definiciones de **conexión**:

1. Una conexión es una distribución complementaria al subfibrado vertical $VP = \{\vec{v} \in TP : p_*(\vec{v}) = 0\}$ que es covariante por la acción de G . Esto es, para cada $y \in P$, se escribe de forma diferenciable $T_yP = V_yP \oplus H_y$, y $H_{y.g} = (R_g)_*H_y$, donde R_g es la acción por la derecha de G .
2. Una conexión es una contracción lineal $\Gamma : TP \rightarrow VP$ tal que $\Gamma|_{VP} = Id$, y conmuta con la acción del grupo, $(R_g)_* \circ \Gamma = \Gamma \circ (R_g)_*$.
3. Una conexión es una 1-forma ω en P con valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} tal que:

- Para todo $A \in \mathfrak{g}$ y todo $y \in P$ se tiene

$$\omega(A_y^*) = A, \quad A_y^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ye^{tA}.$$

- $(R_g)^*\omega = Ad_{g^{-1}} \circ \omega$.

Estas tres definiciones son sutiles, siendo quizá la primera la más intuitiva, pues es simplemente la elección de una distribución horizontal que sea covariante por la acción del grupo. Es ilustrativo comprobar que las tres son equivalentes.

Proposición 2.30. Las tres definiciones son equivalentes.

Demostración. Veamos que (1) \implies (2). Dado $X \in TP$, podemos escribir $X = X^v \oplus X^h$, proyectando sobre cada distribución. Tomamos $\Gamma(X) = X^v$. La covariancia se sigue de la covariancia de la distribución horizontal.

Ahora, veamos (2) \implies (3). Definimos $\omega(X) = A$ cuando $\Gamma(X) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ye^{tA} = A_y^*$, si $X \in T_yP$. El fibrado vertical verifica $VP \simeq P \times \mathfrak{g}$, por lo que la primera propiedad se cumple. Para comprobar la segunda,

$$\begin{aligned} (R_g)_* \Gamma(X) &= (R_g)_* A_y^* = (Ad_{g^{-1}}A)_{y.g}^*, \implies \\ \omega((R_g)_* X) &= (Ad_{g^{-1}}A)^* = Ad_{g^{-1}}\omega(X). \end{aligned}$$

Por último, para comprobar (3) \implies (1), basta tomar $H_y = \ker \omega_y$. Por definición la 1-forma es sobreyectiva y es la identidad sobre el fibrado vertical, luego $T_yP = V_yP \oplus H_y$. Para comprobar la equivariancia, sea $X \in H_y$. Veamos que $(R_g)_* X \in H_{y.g}$. En efecto, $\omega((R_g)_* X) = Ad_{g^{-1}}\omega(X) = 0$. \square

Definición 2.31. Sea $P \rightarrow B$ un fibrado con conexión. Dado un vector tangente del espacio base, $X \in T_xB$ y dado un punto de la fibra $y \in p^{-1}(x)$ se puede encontrar un único vector tangente horizontal, $X^h \in H_y$ al que denominamos **elevación horizontal**, verificando que $p_*(X^h) = X$.

La elevación horizontal, vista como operación $TB \rightarrow TP$ es lineal. Además, si cambiamos $y \rightarrow y.g$, se transforma de modo covariante, $X_{y.g}^h = (R_g)_* X_y^h$.

Una conexión se puede escribir en un cierto abierto trivializable. Dada una base $\{B_1, \dots, B_n\}$ de \mathfrak{g} , elegimos unos campos vectoriales verticales e invariantes por la acción de G :

$$(\tilde{B}_\alpha)_g = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tB_\alpha)g,$$

Entonces la contracción $\Gamma : TP \rightarrow VP$ se puede escribir como

$$\Gamma(\partial_i)_{(x,g)} = A_i^\alpha(x)(\tilde{B}_\alpha)_{(x,g)}.$$

Tal y como se vio en la demostración anterior, de esta contracción lineal se puede obtener la 1-forma de la conexión, a la que denotaremos por A , como

$$A = A_i^\alpha dx^i \otimes \tilde{B}_\alpha.$$

Si se considera un cambio de trivialización, dado por la función de transición g , es fácil comprobar que la conexión cambia como una transformación afín

$$A = Ad_{g^{-1}}\tilde{A} + g^{-1}dg. \quad (3)$$

Cualquier fibrado asociado hereda la conexión del fibrado principal. Sea $E = P \times_G F \rightarrow B$ un fibrado asociado a la acción por la izquierda de G sobre F . Consideramos el difeomorfismo dado por

$$\begin{aligned} \eta : P &\rightarrow E \\ y &\mapsto [(y, v_0)]_G, \end{aligned}$$

donde $v_0 \in F$ es un punto cualquiera fijado previamente. Entonces, definimos la distribución horizontal en E como

$$H_{[(y_0, v_0)]_G}^E = \eta_*(H_{y_0}^P).$$

Se tiene que está bien definida por la covariancia de H^P bajo la acción del grupo y que es compatible con la relación de equivalencia en el fibrado asociado. Esto es importante, pues nos permite dar una noción de derivación en un fibrado asociado a un fibrado principal.

Definición 2.32. Sea P un G -fibrado principal con conexión y sea $E = P \times_G F \rightarrow B$ un cierto fibrado asociado con la conexión inducida. Dada una sección $s \in \Gamma(E)$, se define la **derivada covariante** como:

$$\begin{aligned}\nabla s : \mathfrak{X}(B) &\rightarrow \Gamma(s^*VE) \\ X &\mapsto s_*(X) - X^h.\end{aligned}$$

La derivada covariante da una medida sobre cuánto se desvía la derivada de la sección de la horizontal. Se puede ver que si A es la 1-forma de la conexión en P , localmente viene dada por

$$\nabla s(x) = ds(x) + A(s(x)).$$

En los modelos físicos que se describirán posteriormente no sólo se estudian variables dinámicas que vienen dadas por una sección de un fibrado, sino que la conexión también es un campo a estudiar (el campo *gauge*). Para poder construir sus ecuaciones del movimiento es necesario disponer de una noción de la derivada de este campo *gauge*. Naturalmente la derivada de la conexión es la curvatura.

Definición 2.33. Sea $P \rightarrow B$ un G -fibrado principal y sea $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ una conexión. Se define la **curvatura** como la 2-forma $\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ tal que

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X^h, Y^h), \quad \forall X, Y \in T_y P, y \in P.$$

Una expresión mucho más intuitiva viene dada por la identidad de Cartan.

Proposición 2.34 (Identidad de Cartan). La curvatura Ω asociada a una conexión ω viene dada por

$$\Omega = d\omega + [\omega, \omega]. \quad (4)$$

Demostración. Se tiene que $d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$. Probaremos la identidad considerando tres casos distintos.

En primer lugar, si X e Y son vectores horizontales, $\omega(X) = \omega(Y) = 0$, y $X^h = X$, $Y^h = Y$, luego la igualdad se sigue trivialmente.

En segundo lugar, si X e Y son verticales, se puede asumir que son $X = A^*$, $Y = B^*$ para $A, B \in \mathfrak{g}$, de modo que $\omega(X) = A$ y $\omega(Y) = B$. Esto implica que $Y(A) = X(B) = 0$, luego $d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y])$. Por otra parte, al ser verticales, $\Omega(X, Y) = 0$. Basta comprobar la igualdad

$$\omega([X, Y]) = [\omega(X), \omega(Y)],$$

que se sigue de $[X, Y] = [A^*, B^*] = [A, B]^*$.

El último caso es en el cual X es horizontal e Y es vertical. Escribimos, como en el caso anterior, $Y = A^*$. Se tiene que $\omega(X) = 0$ por ser horizontal y $\omega(Y) = A$. Sigue que $Y(\omega(X)) = X(\omega(Y)) = 0$, y obviamente $[\omega(X), \omega(Y)] = 0$, luego basta comprobar que $\Omega(X, Y) = d\omega(X, 0) = 0 = -\omega([X, Y])$. Para probar esta igualdad, veamos que el corchete de un campo horizontal con un campo vertical es horizontal. Tenemos que $Y = A^*$ es el campo vectorial inducido por R_{a_t} , siendo a_t el subgrupo uni-paramétrico de G que genera $A \in \mathfrak{g}$. Entonces, el corchete de campos vectoriales verifica que

$$[X, A^*] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (R_{a_t}(X) - X).$$

Ahora bien, si X es horizontal, $R_{a_t}(X)$ también lo es, luego necesariamente $[X, A^*]$ es un vector horizontal. \square

A veces es conveniente, dada una k -forma $\alpha \in \Omega^k(P, V)$, definir su diferencial covariante respecto de una conexión ω como

$$D^\omega \alpha(X_1, \dots, X_k) = d\alpha(X_1^h, \dots, X_k^h).$$

En este lenguaje la curvatura no es más que la diferencial covariante de la conexión, $\Omega = D^\omega \omega$.

Proposición 2.35 (Identidad de Bianchi). Dada una conexión ω en un fibrado principal se tiene que

$$D^\omega \Omega = 0. \quad (5)$$

Demostración. De la identidad de Cartan,

$$\begin{aligned} d\Omega &= d[\omega, \omega] = [d\omega, \omega] - [\omega, d\omega], \\ [d\omega, \omega](X, Y, Z) &= [d\omega(X, Y), \omega(Z)] + [d\omega(Z, X), \omega(Y)] + [d\omega(Y, Z), \omega(X)], \end{aligned}$$

luego, como sobre vectores horizontales $\omega(X^h) = 0$, se sigue el resultado. \square

Observación 2.36. La curvatura es covariante por la acción adjunta, es decir, $(R_g)^* \Omega = Ad_{g^{-1}} \Omega$.

Observación 2.37. La conexión es una forma que está definida en el fibrado principal, P . Sin embargo, la curvatura es una forma que puede ser considerada en el espacio base, B . En efecto, dada la curvatura $\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$, podemos definir $\tilde{\Omega} \in \Omega^2(B, adP)$, donde $adP = P \times_G \mathfrak{g}$ es el fibrado asociado a la acción adjunta de G sobre \mathfrak{g} , como:

$$\tilde{\Omega}_x(X, Y) = [y, \Omega_y(X_y^h, Y_y^h)]_G,$$

donde $y \in p^{-1}(X)$. Se comprueba directamente que está bien definida. El recíproco también es cierto, es decir, dada $\tilde{\Omega} \in \Omega^2(B, adP)$ se puede construir $\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$. Esto significa, si tenemos en cuenta que el espacio físico es el espacio base B , mientras que el fibrado es el espacio fiduciario donde actúan las transformaciones *gauge*, que si bien la conexión no es estrictamente definible en B , la curvatura sí lo es.

Si bien la conexión no es “física” (en el sentido en que no se puede definir sobre el espacio base), hay un concepto directamente relacionado que sí se puede observar físicamente, que es la holonomía [15]. Para construirla, primero debemos definir la elevación horizontal de un camino en un fibrado.

Definición 2.38. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ un camino en B con $x_0 = \gamma(0)$ y sea $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ un punto cualquiera de la fibra. Entonces definimos la **elevación horizontal** $\gamma^h : [0, 1] \rightarrow P$ del camino γ comenzando en $\gamma^h(0) = y_0$ como la única curva diferenciable con $p \circ \gamma^h = \gamma$ y $\dot{\gamma}^h(t) \in H_{\gamma^h(t)}$.

Denominamos por $C(x)$ al conjunto de los lazos $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ con punto base $x \in B$. Para cada lazo, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} p(\gamma) : p^{-1}(x) &\rightarrow p^{-1}(x) \\ y &\mapsto \gamma^h(1), \end{aligned}$$

donde γ^h es la elevación horizontal de γ comenzando en $\gamma^h(0) = y$.

Definición 2.39. Se define la **holonomía** en un punto $x \in B$ como el grupo formado por las aplicaciones $p(\gamma)$ cuando $\gamma \in C(x)$, y la operación dada por $p(\gamma) \star p(\sigma) = p(\gamma \circ \sigma)$, donde \circ es la concatenación de caminos. Se denota por $Hol(x)$.

Si fijamos un $y \in p^{-1}(x)$, para cada lazo γ se tiene que $p(\gamma)(y) = y.g$ para un $g \in G$. Por tanto, la holonomía puede verse como un subgrupo de G una vez se ha fijado un punto de la fibra. Por eso es más conveniente fijar este punto y denotar al grupo de holonomía por $\text{Hol}(y)$. Si se toma otro $y' \in p^{-1}(x)$, se tiene que $y' = yg$ para algún $g \in G$, luego

$$\text{Hol}(y') = g^{-1}\text{Hol}(y)g.$$

Intuitivamente, la holonomía informa sobre el desplazamiento sufrido en el fibrado al realizar un camino cerrado en el espacio base, transportándose de acuerdo a la conexión. Esto se ilustra con el siguiente resultado.

Proposición 2.40. Si $y_1, y_2 \in P$ son dos puntos conectados por una curva horizontal, entonces sus grupos de holonomía coinciden.

Demostración. Sea $x_a = p(y_a)$, $a = 1, 2$, y sea $\tilde{\gamma}$ la curva horizontal que conecta y_1 e y_2 . Sea $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. Para cada lazo $\alpha \in C(x_1)$ consideramos $\gamma\alpha\gamma^{-1} \in C(x_2)$. Sea $\tilde{\alpha}$ su elevación horizontal comenzando en y_1 , y supongamos que $p(\alpha) = y_1.g$. Entonces, la elevación horizontal de $\gamma\alpha\gamma^{-1} \in C(x_2)$, por unicidad, es $\tilde{\gamma}g\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}$, y $p(\gamma\alpha\gamma^{-1}) = y_2g$, lo que demuestra $\text{Hol}(y_1) = \text{Hol}(y_2)$. \square

De esta proposición se puede construir explícitamente una reducción del fibrado principal a un $\text{Hol}(y_0)$ -fibrado principal, para un y_0 fijo.

Teorema 2.41. Sea $P \rightarrow B$ un G -fibrado principal con conexión y sea $y_0 \in P$. Definimos

$$P(y_0) = \{y \in P : \exists \text{ camino horizontal uniendo } y \text{ e } y_0\}.$$

$P(y_0)$ es una reducción de P con grupo $\text{Hol}(y_0)$. Además, la conexión se reduce.

Demostración. Sea $x \in B$. La fibra sobre $P(y_0)$ viene dada por los puntos de $p^{-1}(x)$ que están conectados con y_0 por un camino horizontal, es decir, que son $y = y_0.g$ para algún $g \in \text{Hol}(y_0)$. Se tiene que el grupo de holonomía actúa de forma libre sobre $P(y_0)$. Por tanto, basta probar que admite secciones locales (esto es equivalente a encontrar una trivialización local). Si considero un entorno abierto U^x de $x \in B$ centrado en x , podemos conectar cada punto x' con x por un radio. Dado un $y \in p^{-1}(x)$, consideramos la sección dada por

$$s : x' \in U \mapsto p(\tilde{r}_{x',x}) \in P(y_0),$$

donde $\tilde{r}_{x',x}$ es la elevación horizontal del lazo construido a partir del radio que une los puntos x', x . La conexión se reduce de forma evidente dado que $H_y(P) \subset T_y P(y_0)$, ya que la distribución horizontal se puede ver como los vectores de velocidad de curvas horizontales, que están incluidos en $P(y_0)$. \square

Un resultado muy importante, debido a Ambrose y Singer, del cual no se da la demostración, demuestra la relación existente entre la holonomía de un fibrado principal y la curvatura. Se denota por $\mathfrak{hol}(y)$ al álgebra de Lie asociada al grupo $\text{Hol}(y)$.

Teorema 2.42 (Ambrose-Singer). Sea $P \rightarrow B$ un G -fibrado principal con conexión dada por ω , y sea Ω la curvatura de esa conexión. Entonces, se verifica:

$$\mathfrak{hol}(y_0) = \text{span} \{ \Omega(X, Y), \quad X, Y \in T_y P, \quad y \in P(y_0) \}. \quad (6)$$

Dado que, tal y como se ha mencionado previamente, la conexión actúa como un campo *gauge* en las teorías de campos que se analizarán, sería ideal si fuéramos capaces escribir este nuevo campo como una sección de un cierto fibrado, para tratarlo en pie de igualdad con el resto de campos o variables físicas del modelo. Esta construcción recibe el nombre de fibrado de conexiones. En primer lugar, debemos introducir el concepto de jet.

Definición 2.43. Sea $P \rightarrow B$ un fibrado principal y $x \in B$. Dadas dos secciones s, s' locales se dice que generan el mismo **1-jet** si $s(x) = s'(x)$ y $s_*(x) = s'_*(x)$, es decir, si su desarrollo de Taylor a primer orden coincide. Denotamos por $j_x^1 s$ a la clase de equivalencia de las secciones que generan el mismo 1-jet. Al espacio de 1-jets se le denota por $J^1 P$.

Observamos que el espacio de 1-jets es una variedad diferenciable, pues podemos dar unas coordenadas locales $(x^i, y^\alpha, y_i^\alpha)$ tales que $j_x^1 s = (x^i, y^\alpha(s(x)), y_j^\alpha(j_x^1 s))$ cuando $s(x) = x^i$ en términos de unas coordenadas locales en P y además

$$y_j^\alpha(j_x^1 s) = \frac{\partial y^\alpha(s)}{\partial x^j}(x).$$

. Además, es un fibrado sobre B con la proyección $p_B : J^1 P \rightarrow B$, $p_B : j_x^1 s \mapsto x$ y también es un fibrado sobre P con la proyección $p_P : J^1 P \rightarrow P$, $p_P : j_x^1 s \mapsto s(x)$. No obstante, no es un fibrado principal. En cualquier caso, aunque no tenga estructura de fibrado principal, se puede introducir una noción de conexión compatible con la definición que hemos dado para fibrados principales.

Definición 2.44. Sea $P \rightarrow B$ un fibrado arbitrario. Una **conexión de Ehresmann** es una distribución HP complementaria al fibrado vertical, $TP = VP \oplus HP$.

Se comprueba que una conexión en un fibrado principal es una conexión de Ehresmann que es covariante bajo la acción del grupo. Paralelamente, una conexión de Ehresmann se puede entender, sencillamente, como una regla que asigna a cada punto $y \in P$ un cierto jet $j_x^1 s$. En efecto, una conexión de Ehresmann decreta un cierto subespacio de $T_y P$ como horizontal. Equivalentemente, estamos escogiendo una sección local con $s(x) = y$, siendo y un punto de la fibra de x , tal que la imagen de su diferencial es precisamente el subespacio horizontal de la conexión de Ehresmann. Como fijamos tanto el valor de la sección como el de su diferencial, el 1-jet queda unívocamente determinado por la conexión de Ehresmann. Recíprocamente la elección de un 1-jet en cada punto $y \in P$ proporciona una conexión de Ehresmann mediante la elección $HP = \bigcap_{y \in P} \text{Im}(j_{p(y)}^1 s)$, de tal manera que la distribución horizontal es la imagen de la diferencial del un 1-jet escogido.

Si la conexión es además una conexión en un fibrado principal, verifica la condición de covariancia $H_{y.g} = (R_g)_* H_y$ para cualquier $g \in G$. Esta condición significa que dos 1-jets en $J^1 P$ definen la misma conexión si están relacionados mediante la acción de G en $J^1 P$. Esta acción queda fijada por la acción de G sobre P mediante

$$j_x^1 s.g = j_x^1 (s.g).$$

Por lo tanto, podemos interpretar una conexión en un fibrado principal como una asignación

$$y \in P \mapsto [j_x^1 s]_G \in J^1 P/G, \quad (7)$$

donde un 1-jet diferente $j_x^1 s' \in [j_x^1 s]_G$ si existe $g \in G$ tal que $j_x^1 s'.g = j_x^1 s$. Al fibrado

$$J^1 P/G = C \rightarrow B \quad (8)$$

se le denomina fibrado de conexiones, y es un fibrado afín modelado sobre $T^*B \otimes \text{ad}P$. Esto se ve directamente de la expresión local de una conexión, que viene dada por $A = A_i^\alpha dx^i \otimes \tilde{B}_\alpha$.

Dada una conexión de un fibrado principal, $A \in \mathcal{A}(P)$, podemos encontrar una sección del fibrado de conexiones $\sigma_A \in \mathcal{C} = \Gamma(C)$ que define precisamente la conexión A . La sección σ_A es aquella que para cada punto del espacio base B escoge una clase de equivalencia de 1-jets tales que para cada $y \in P$, $\text{Im}(s_{A*}) = H_y P$ es la distribución horizontal, donde $\sigma_A(x) = [j_x^1 s_A]_G$. Recíprocamente, una sección de C define una única conexión del fibrado principal. En conclusión, podemos afirmar que $\mathcal{A}(P)$ y \mathcal{C} están en correspondencia biyectiva.

3. Teorías de Campos

3.1. Definición y Ecuaciones de Euler-Lagrange

El principio que gobierna toda teoría de campos es el principio de Hamilton, que determina que las soluciones relevantes son aquellas que son críticas para un funcional de acción. En Mecánica Clásica el funcional de acción es la integral en el tiempo de una densidad lagrangiana $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ que toma valores en el espacio de fases TQ . Una teoría de campos es una extensión natural de la Mecánica Clásica, en la que ahora el lagrangiano será función de los campos y de sus derivadas, y podremos escribir un funcional de acción del que se deriven las ecuaciones de movimiento. La discusión de esta sección se basa fundamentalmente en [4].

Sea $p : E \rightarrow M$ un fibrado cualquiera, donde $n = \dim M < \infty$, y la variedad M es compacta, conexa y orientable. Toda esta discusión se puede extender para variedades que no son compactas, exigiendo entonces que las secciones y las variaciones que se tomen tengan soporte compacto. Denotamos por $p_1 : J^1E \rightarrow M$ el 1-jet de secciones de E (Def. 2.43).

Definición 3.1. Un **lagrangiano** sobre $p : E \rightarrow M$ es una aplicación diferenciable $\mathcal{L} : J^1E \rightarrow \mathbb{R}$.

A veces se trata de forma diferente el concepto de densidad lagrangiana del de lagrangiano, considerando que la densidad lagrangiana es un morfismo de fibrados $\Lambda : J^1E \rightarrow \Lambda^n T^*M$. No obstante, cuando M es orientable y se ha fijado una forma de volumen v , siempre se puede escribir $\Lambda = \mathcal{L}v$ para una \mathcal{L} del tipo de la definición dada. Por eso, se utilizará lagrangiano y densidad lagrangiana de forma indistinta.

Es destacable que, a priori, nada impediría a las teorías de campos ser descritas por derivadas de orden superior. Esto se puede generalizar, definiendo el lagrangiano como una función desde el k -jet de secciones, J^kE , que se define de forma equivalente.

Dado un lagrangiano, este induce un funcional de acción como:

$$A : \Gamma(E) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A(s) = \int_M \mathcal{L}(j_x^1 s) v.$$

Para poder calcular cuándo el funcional de acción alcanza un extremo es necesario precisar qué significa tomar variaciones respecto a una cierta sección.

Definición 3.2. Sea $A : \Gamma(E) \rightarrow \mathbb{R}$ el funcional de acción definido por una densidad lagrangiana \mathcal{L} . Sea $VE \subset \mathfrak{X}(E)$ el subconjunto de campos vectoriales verticales. Entonces, dada una sección $s \in \Gamma(E)$ se define la **variación lineal** del funcional de acción como:

$$\delta_s A : VE \rightarrow \mathbb{R},$$

$$X \mapsto \int_M \left(\mathbb{L}X^{(1)}(\mathcal{L}) \circ j^1 s \right) v = \int_M X^{(1)}(\mathcal{L}) \circ j^1 s v,$$

donde $X^{(1)}$ es el levantamiento de X a J^1E (cuya construcción se explica posteriormente), $\mathbb{L}X^{(1)}$ es su derivada de Lie correspondiente, y $j^1 s : M \rightarrow J^1E$ es la aplicación tal que $j^1 s(x) = j_x^1 s$. Diremos que una sección $s \in \Gamma(E)$ es **crítica** cuando $\delta_s A = 0$.

Se definen las variaciones de esta manera porque perturbar ligeramente una sección significa modificar su valor en cada punto a través de un campo vectorial vertical, de modo que no mezcle fibras entre sí. Para ello es importante precisar cómo se puede elevar un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(E)$ al espacio de jets $X^{(1)} \in \mathfrak{X}(J^1E)$. El campo vectorial define unívocamente un flujo $\Phi_X^t : E \rightarrow E$, que es un automorfismo del fibrado. Como el campo vectorial es vertical, el automorfismo inducido

por el flujo sobre la variedad base, $\phi_X : M \rightarrow M$ es la identidad $\phi_X = 1$. Los automorfismos se pueden elevar al fibrado de jets de forma natural mediante

$$(\Phi_X^t)^{(1)}(j_x^1 s) = j_x^1(\Phi_X^t(s)). \quad (9)$$

Entonces, definimos la elevación del campo vectorial como el campo vectorial en $\mathfrak{X}(J^1 E)$ generado por el flujo $(\Phi_X^t)^{(1)}$. Esto se puede hacer también cuando el campo vectorial no es vertical, en cuyo caso, la elevación del flujo viene dada por $(\Phi_X^t)^{(1)}(j_x^1 s) = j_{\phi(x)}^1(\Phi(s) \circ \phi^{-1})$.

Teorema 3.3. Sea $A : \Gamma(E) \rightarrow \mathbb{R}$ el funcional de acción asociado al lagrangiano \mathcal{L} . Una sección $s : M \rightarrow E$ es crítica si y solo si es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\alpha} \circ j^1 s - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i^\alpha} \circ j^1 s \right) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad (10)$$

donde m es la dimensión de las fibras, y se ha escogido un sistema fibrado de coordenadas en E , $(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^m)$ que induce unas coordenadas (y_i^α) en $J^1 E$, y donde la forma de volumen está adaptada a las coordenadas escogidas, esto es, $v = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$.

Demostración. En esas coordenadas locales, escribimos la variación lineal para el campo vectorial Z y la sección s como

$$\begin{aligned} \delta_s A &= \int_M \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{L}(j^1(\Phi_Z^t(s))) v = \\ &= \int_M \left(Z^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\alpha} \circ j^1 s + \frac{\partial Z^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i^\alpha} \circ j^1 s \right) v. \end{aligned}$$

Ahora, el segundo término se puede integrar por partes, y el término que resulta de una derivada total puede obviarse por haber considerado que la variedad M es compacta. El resultado, después de integrar por partes, es

$$\delta A = \int Z^\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\alpha} \circ j^1 s - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i^\alpha} \circ j^1 s \right) \right) v,$$

y se debe verificar para cualquier campo vectorial Z . Entonces, el Lema fundamental del cálculo variacional garantiza que el término que multiplica a las Z^α dentro de la integral debe anularse, de lo que se siguen directamente las ecuaciones de Euler-Lagrange. \square

3.2. Teorías de Yang-Mills

Podemos aplicar toda esta discusión a un G -fibrado principal, $p : P \rightarrow M$, considerando secciones del fibrado de conexiones $C(P) = \mathcal{C}$. Estas secciones, que están en correspondencia biyectiva con las conexiones en P , son el campo *gauge* a estudiar, y la densidad lagrangiana ahora es una función $\mathcal{L} : J^1 C \rightarrow \mathbb{R}$. A estas teorías se las denominará teorías *gauge*. A partir de este punto se asumirá que el espacio base es una variedad pseudo-riemanniana, con métrica g .

Un caso particular de teorías *gauge*, que es el que se realiza habitualmente en las teorías físicas, por algunos motivos que se explicitarán más adelante, es el de las teorías de Yang-Mills (YM). El lagrangiano libre en la Mecánica Clásica es cuadrático en las primeras derivadas del grado de libertad que se estudia. Tomando inspiración en esto, se construye el lagrangiano YM como el lagrangiano más sencillo que es cuadrático en la derivada de la conexión, es decir, en la curvatura.

Definición 3.4. Sea $p : P \rightarrow M$ un G -fibrado principal y sea C su fibrado de conexiones. Definimos la **aplicación curvatura** como el morfismo de fibrados que asocia a cada 1-jet de conexión en un punto la curvatura en ese punto, es decir,

$$\begin{aligned}\Omega : J^1C &\rightarrow \Lambda^2 T^*M \otimes \text{ad}(P) \\ j_x^1 s &\rightarrow F_A(x),\end{aligned}$$

donde A es la conexión asociada a la sección $s \in \Gamma(C) = \mathcal{C}$.

Esta aplicación está bien definida ya que, como se ha discutido anteriormente, la curvatura se puede ver como una 2-forma en M que toma valores en $\text{ad}P$, y que depende únicamente en ese punto de la conexión y su primera derivada en ese punto (véase la ecuación (15) más adelante).

Para construir el lagrangiano de YM basta entonces encontrar una forma cuadrática en $\text{ad}(P) \simeq \mathfrak{g}$. Para ello, como $\text{ad}(P)$ es un espacio cociente por la acción adjunta en \mathfrak{g} , buscamos una métrica en el álgebra de Lie que sea invariante por la adjunta. Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie semisimple (es decir, si es suma directa de álgebras de Lie simples no abelianas, que son aquellas que no tienen ningún ideal propio no trivial) podemos escoger la métrica de Cartan-Killing, que para $A, B \in \mathfrak{g}$ se escribe

$$h(A, B) = \text{Tr}(\text{ad}_A \text{ad}_B),$$

donde $\text{ad}_A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es el morfismo de álgebras de Lie que realiza la acción adjunta, es decir, $\text{ad}_A(B) = [A, B]$. Es un resultado bien conocido, debido a Cartan, que un álgebra es semi-simple si y solamente si la métrica de Cartan-Killing es no-degenerada. Entonces, dada esta métrica se puede construir el siguiente lagrangiano.

Definición 3.5. Se denomina **lagrangiano de Yang-Mills** asociado a un G -fibrado principal $P \rightarrow M$ al lagrangiano

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : J^1C &\rightarrow \mathbb{R} \\ j_x^1 s &\mapsto ((F_A(x), F_A(x)))_{(g,h)},\end{aligned}\tag{11}$$

donde A es la conexión asociada a la sección s y si $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^2(M)$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma(M, \text{ad}P)$,

$$((\omega_1 \otimes \alpha_1, \omega_2 \otimes \alpha_2))_{(g,h)} = g(\omega_1, \omega_2)h(\alpha_1, \alpha_2),$$

siendo g la métrica en M aplicada a 2-formas y h la métrica de Cartan-Killing en $\text{ad}P$. Por abuso de notación se utiliza la misma letra para denotar la métrica de Cartan-Killing en \mathfrak{g} y la métrica que induce en $\text{ad}P$ de la siguiente manera: si $\alpha_i = [(p, \xi_i)]_G$ con $i = 1, 2$ son dos puntos de $\text{ad}P$, definimos $h(\alpha_1, \alpha_2) = h(\xi_1, \xi_2)$.

Al funcional de acción para el lagrangiano de Yang-Mills se le suele denotar por

$$\begin{aligned}YM : \mathcal{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \int_M ((F_A(x), F_A(x)))_{(g,h)} v_g,\end{aligned}$$

donde suponemos por comodidad que M es compacto. Para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange en este caso se puede proceder buscando los extremos del funcional $YM : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Como C es un espacio afín modelado sobre $\Omega^1(M, \text{ad}P)$, las secciones extremales son aquellas tales que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} YM(A + ta) = 0, \quad \forall a \in \Omega^1(M, \text{ad}P).$$

Localmente se verifica que

$$\begin{aligned} F_{A+ta} &= d(A+ta) + [A+ta, A+ta] = dA + [A, A] + t(da + A \wedge a) + t^2[a, a] = \\ &= F_A + td^A a + t^2[a, a]. \end{aligned}$$

Tomando el diferencial nos quedamos únicamente con los términos de primer orden en a ,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} YM(A+ta) = 2 \int_M (F_A, d^A a)_{(g,h)} = 2 \int_M d^A a \wedge \star F_A,$$

donde se denota por $(\omega_1 \otimes B_1) \hat{\wedge} (\omega_2 \otimes B_2) = h(B_1, B_2) \omega_1 \wedge \omega_2$, y se utiliza la estrella de Hodge como el operador $\star : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{n-p}(M)$ que verifica que $g(\alpha, \beta) = \alpha \wedge \star \beta$. A continuación, observamos que la derivada covariante de un producto de Cartan-Killing verifica la siguiente relación,

$$d^A(\alpha, \beta)_h = (d^A \alpha) \hat{\wedge} \beta + \alpha \hat{\wedge} d^A \beta. \quad (12)$$

Esta es una regla del producto con respecto al producto interno en este espacio, $\hat{\wedge}$, por lo cual, es posible integrar por partes este término, obteniendo

$$-2 \int_M a \hat{\wedge} (d^A \star F_A) + 2 \int_M d^A (a \hat{\wedge} \star F_A) = -2 \int_M a \hat{\wedge} (d^A \star F_A),$$

donde el último término se anula al ser M compacto. Utilizando la definición de la estrella de Hodge una vez más, se tiene que las secciones extremales verifican

$$\int_M (a, \star d^A \star F_A)_{(g,h)} v_g = 0, \quad \forall a \in \Omega^1(M, adP),$$

luego las ecuaciones de movimiento para el funcional de YM son, de acuerdo al Lema fundamental del cálculo variacional:

$$\star d^A \star F_A = 0. \quad (13)$$

En este caso hemos derivado las ecuaciones de Yang-Mills directamente tomando variaciones en el funcional de acción. Se puede comprobar que sustituyendo en (10) se obtendrían las mismas ecuaciones.

Ejemplo 3.6 (Electromagnetismo y las ecuaciones de Maxwell). Consideramos el $U(1)$ -fibrado principal trivial $M \times U(1) \rightarrow M$ sobre $M = \mathbb{R}^4$. En este caso la variedad base no es compacta. Si bien la discusión previa se ha realizado bajo la hipótesis de que M es un compacto, eso se hace únicamente por comodidad. Para extender la discusión a variedades no compactas es suficiente con exigir unas condiciones de decaimiento hacia el infinito. Esto permite asegurar que todas las funciones se anulan en el punto adicional (punto del infinito) que se añade en la compactificación de Alexandroff de \mathbb{R}^4 en S^4 , y por tanto podemos trabajar sobre S^4 que sí que es una variedad compacta.

En este caso también hay que ser cuidadoso pues $U(1)$ no es un grupo semi-simple (es abeliano). Por lo tanto, el producto de Cartan-Killing es degenerado, dado que la adjunta en un espacio abeliano es trivial. No obstante, en este caso el álgebra de Lie es $u(1) \simeq \mathbb{R}$, luego podemos escoger cualquier producto escalar en \mathbb{R} . Como la acción adjunta es trivial, cualquier producto escalar que escojamos es invariante por la adjunta, y las ecuaciones del movimiento y el resto de propiedades son independientes de esta elección. Imponiendo entonces el funcional de Yang-Mills obtenemos

$\star d \star F = 0$. Por ser $u(1)$ abeliano, $F = dA + [A, A] = dA$, luego las ecuaciones YM para una teoría $U(1)$ son

$$\star d \star dA = 0, \implies \Delta A = 0,$$

donde se define el laplaciano como $\Delta = \star d \star d = \delta d$. En algunos textos se denomina a $\delta = \star d \star$ codiferencial. Al ser $u(1) \simeq \mathbb{R}$ y teniendo en cuenta todo lo anterior, podemos ver la curvatura F como una 2-forma que toma valores en los reales, así que en particular podemos escribir en términos de los campos vectoriales $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ y $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$,

$$F = -E_i dx^0 \wedge dx^i + \epsilon_{ijk} B_i dx^j \wedge dx^k.$$

No es difícil comprobar entonces que $dF = d^2 A = 0$ es equivalente a

$$\text{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{div} \vec{B} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0.$$

En esta expresión y en la siguiente se están identificando implícitamente vectores con 3-formas de \mathbb{R}^4 por medio del isomorfismo $\mathbb{R}^4 \rightarrow \Lambda^3(\mathbb{R}^4)^\star$ que asocia a cada vector $\vec{u} \mapsto i_{\vec{u}} v$ su contracción con la forma de volumen. Equivalentemente, la condición $\star d \star F = 0$ se traduce a

$$\text{div} \vec{E} dx^0 + \star \left(\text{rot} \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0,$$

que son las dos ecuaciones de Maxwell restantes. Esto demuestra que el electromagnetismo se puede entender como una teoría *gauge* $U(1)$ descrita por el lagrangiano de Yang-Mills.

4. Caracterización de Lagrangianos

Tal y como se ha definido, es posible construir multitud de lagrangianos $L : J^1C \rightarrow \mathbb{R}$, dado que no se han impuesto más condiciones sobre ellos. Sin embargo, la gran mayoría de esos lagrangianos no son, desde el punto geométrico, covariantes con respecto a las simetrías internas del fibrado J^1C , que son las transformaciones inducidas de las transformaciones *gauge* en el fibrado principal P . Más aún, si se busca utilizar los lagrangianos para describir las teorías de campos cercanas a los modelos vigentes en Física Teórica se encuentra que sólo unos pocos de ellos, con unas características muy especiales, son los que aparecen en dichos modelos. Esta sección pretende arrojar algo de luz sobre estas cuestiones.

4.1. Teorema de Utiyama

La condición más natural que podemos imponer sobre los lagrangianos es la invariancia bajo transformaciones *gauge* de J^1C . Los modelos de teoría de campos tienen habitualmente grados de libertad espurios, que deberían ser irrelevantes para las ecuaciones del movimiento. Las transformaciones *gauge* en P , y equivalentemente en J^1C , son las transformaciones que afectan exclusivamente a estos grados de libertad espurios. Por lo tanto, una manera de garantizar la independencia de las ecuaciones del movimiento de estos grados de libertad es exigir la invariancia *gauge* del lagrangiano. El Teorema de Utiyama [13] caracteriza este tipo de lagrangianos.

Una transformación $\Phi \in \text{Gau}(P)$ induce una transformación *gauge* en el fibrado de conexiones $\Phi_C \in \text{Diff}(C)$. En efecto, si $s \in \Gamma(C) = \mathcal{C}$ es una sección asociada a la conexión en P que tiene 1-forma ω_s , definimos su imagen por medio del difeomorfismo inducido en el espacio de conexiones $\Phi_C \circ s \in \mathcal{C}$ como la sección asociada a la conexión con 1-forma $\omega_{\Phi_C \circ s} = (\Phi^{-1})^* \omega_s$. Esto define completamente la acción de $\Phi_C : C \rightarrow C$.

Además, las transformaciones de un fibrado se elevan de forma directa a las transformaciones de cualquiera de sus jets, por lo que podemos considerar su elevación $\Phi_C^{(1)} \in \text{Diff}(J^1C)$ (en la ecuación (9) se da una expresión concreta de esta elevación para automorfismos verticales).

Definición 4.1. Un lagrangiano $L : J^1C \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es **invariante *gauge*** si

$$L(\Phi_C^{(1)}(j_x^1 s)) = L(j_x^1 s), \quad \forall j_x^1 s \in J^1C, \forall \Phi \in \text{Gau}(P). \quad (14)$$

Para poder probar el Teorema de Utiyama es necesario comprobar ciertas propiedades de la aplicación curvatura $\Omega : J^1C \rightarrow \Lambda^2 T^*M \otimes \text{ad}(P)$ definida en 3.4.

Lema 4.2. La aplicación curvatura es una submersión sobreyectiva. Además, dado cualquier $F_x \in \Lambda^2 T^*M \otimes \text{ad}(P)$, se verifica que $\dim(\Omega^{-1}(F_x)) = mn + mn(n+1)/2$, siendo $\dim(M) = n$ y $\dim(G) = n$.

Demostración. Tomamos coordenadas fibradas en P , C y $\text{ad}(P)$ de modo que las coordenadas locales en J^1C se denotan por $(A_i^\alpha, A_{i,j}^\alpha)$ y $\{B_\alpha\}$ es una base de \mathfrak{g} . Demostremos primero la sobreyectividad. Primero, notamos que fijado un punto $x \in M$, su fibra en $\text{ad}(P)$ se identifica con el álgebra de Lie \mathfrak{g} . Tomamos $\{B_\alpha\}$ una base de \mathfrak{g} . En lo que sigue, los índices griegos recorren la dimensión de G y los índices latinos, la dimensión de M . Podemos escribir que un elemento $F \in \Lambda^2 T^*M \otimes \text{ad}(P)$ se escribe como $F = F_{ij}^\alpha dx^i \wedge dx^j \otimes B_\alpha$, para ciertos coeficientes escalares F_{ij}^α . Localmente, utilizando la Prop. 2.34, la curvatura actúa como

$$\Omega(x^i, A_i^\alpha, A_{i,j}^\alpha) = \left(A_{i,j}^\alpha - A_{j,i}^\alpha + c_{\beta\gamma}^\alpha A_i^\beta A_j^\gamma \right) dx^i \wedge dx^j \otimes B_\alpha, \quad (15)$$

en términos de $c_{\beta\gamma}^\alpha$ las constantes de estructura de \mathfrak{g} . Entonces se puede comprobar que $\Omega(x^i, 0, 1/2 F_{ij}^\alpha) = F$, por lo que se tiene la sobreyectividad.

Para ver que es una submersión, veremos que la diferencial

$$d_{j_x^1 A} \Omega : T_{j_x^1 A} J^1 C \rightarrow T_{(F_A)_x} (\Lambda^2 T^* M \otimes \text{ad}(P))$$

es sobreyectiva. Esto se puede analizar por separado para campos verticales y campos horizontales respecto del sistema de coordenadas escogido. Los campos verticales admiten una expresión local como $\xi = \xi_{ij}^\alpha dx^i \wedge dx^j \otimes B_\alpha$, pues podemos identificar $V_{(F_A)_x}(\Lambda^2 T^* M \otimes \text{ad}(P)) \simeq \Lambda^2 T^* M \otimes \text{ad}(P)$. Entonces, basta considerar una curva en $J^1 C$ dada localmente por $\gamma(t) = (x^i, A_i^\alpha, A_{i,j}^\alpha + t/2 \xi_{ij}^\alpha)$ de modo que $\Omega(\gamma(t)) = F_A + t\xi$, luego evidentemente ξ está en la imagen del diferencial.

Para los campos horizontales, veremos que la dimensión de la imagen del diferencial coincide con la dimensión de este espacio. El espacio $H \subset T_{j_x^1 A} J^1 C$ de campos horizontales respecto del sistema de coordenadas tiene $\dim H = \dim M = n$, y $p_*(H) = T_x M$, por lo que $\dim d_{j_x^1 A} \Omega(H) \leq n$. Por otro lado, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} J^1 C & \xrightarrow{\Omega} & \Lambda^2 T^* M \otimes \text{ad}(P) \\ & \searrow p & \swarrow \hat{p} \\ & M & \end{array}$$

es conmutativo. Esto implica que $d_{j_x^1 A}(\hat{p} \circ \Omega)(H) = d_{j_x^1 A} p(H) = T_x M$, por lo que se tiene la otra desigualdad, $\dim d_{j_x^1 A} \Omega(H) \geq n$, de lo que se sigue que la aplicación curvatura es una submersión.

Por último, se busca contar la dimensión de las fibras. Podemos hablar de fibras puesto que, como se va a comprobar a continuación, la dimensión de $\Omega^{-1}(F_x)$ no depende del punto escogido, de modo que la aplicación curvatura es una fibración (nótese que esto no implica que sea un fibrado). La dimensión de $\Omega^{-1}(F_x)$, siendo una submersión sobreyectiva, vendrá dada por la diferencia entre las dimensiones de $J^1 C$ y $\Lambda^2 T^* M \otimes \text{ad}(P)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \dim(\Omega^{-1}(F_x)) &= \dim(J^1 C) - \dim(\Lambda^2 T^* M \otimes \text{ad}(P)) = mn + mn^2 - m \frac{n(n-1)}{2} = \\ &= mn + \frac{mn(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. \square

Para poder formular el Teorema de Utiyama debemos precisar cuál es la acción adjunta sobre $\Lambda^2 T^* M \otimes \text{ad}(P)$. En primer lugar, la acción adjunta sobre $\Lambda^2 T^* M$ es trivial. Sobre $\text{ad}P$ actúa de la siguiente manera. Sean $\alpha_i = [(p, \xi_i)]_G \in \text{ad}(P) = (P \times \mathfrak{g})/G$ dos puntos de el fibrado adjunto ($i = 1, 2$). Entonces $\text{ad}_{\alpha_1} \alpha_2 = [(p, [\xi_1, \xi_2])]_G$ viene dada sencillamente por el corchete en la parte asociada al álgebra de Lie. Visto esto, se puede pasar a enunciar y demostrar el Teorema de Utiyama. La demostración que aquí se presenta está basada en la idea de la demostración realizada en [8]. Consideramos además que G es un grupo conexo.

Teorema 4.3 (Teorema de Utiyama). Sea $L : J^1 C \rightarrow \Lambda^2 T^* M \otimes \text{ad}(P)$ un lagrangiano. Es invariante *gauge* si y solamente si $L = \tilde{L} \circ \Omega$, donde $\tilde{L} : \Lambda^2 T^* M \otimes \text{ad}(P) \rightarrow \mathbb{R}$ es invariante por la acción adjunta.

Demostración. Se toman coordenadas locales fibradas como en la demostración anterior, de modo que las coordenadas en $J^1 C$ se denotarán $(A_i^\alpha, A_{i,j}^\alpha)$ mientras que las coordenadas locales en $\Lambda^2 T^* M \otimes \text{ad}(P)$ vienen dadas por Ω_{ij}^α . Como la afirmación del Teorema es local es suficiente demostrarlo en un abierto coordenado.

Primeramente, veamos como actúan las transformaciones *gauge*. Sea $\Phi \in \text{Gau}(P)$, entonces, $\Phi(x, p) \mapsto (x, \phi(x)p)$, con $\phi : U \subset M \rightarrow G$ siendo U un abierto trivializable. Consideramos

una familia uni-paramétrica de transformaciones *gauge*, que viene dada por $\phi_t(x) = \exp(t\varphi(x))$, con $\varphi \in C^\infty(U, \mathfrak{g})$. Entonces, si el grupo G es conexo se verifica que la acción es invariante por transformaciones *gauge* si y solamente si es invariante por la acción del campo vectorial inducido en J^1C por la acción de φ .

Si $\{B_\alpha\}$ es una base de \mathfrak{g} , podemos escribir $\varphi(x) = \varphi^\alpha(x)B_\alpha$. Por (3) sabemos que el campo inducido sobre C viene dado por

$$X_C = \left(\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} + c_{\beta\gamma}^\alpha \varphi^\beta A_i^\gamma \right) \frac{\partial}{\partial A_i^\alpha}.$$

Y para obtener el campo inducido sobre J^1C no hay más que tomar derivadas sobre este campo (el llamado levantamiento jet del campo), obteniendo

$$X_C^{(1)} = X_C + \left(\frac{\partial^2 \varphi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} + c_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} A_i^\gamma + c_{\beta\gamma}^\alpha \varphi^\beta A_{i,j}^\gamma \right) \frac{\partial}{\partial A_{i,j}^\alpha}.$$

Podemos descomponer $X_C^{(1)} = Z_0 + Z_1 + Z_2$, según las partes que van como φ^α , como las derivadas $\partial \varphi^\alpha / \partial x^i$ y como las segundas derivadas $\partial^2 \varphi / \partial x^i \partial x^j$, respectivamente. Veremos que la invariancia por Z_0 se traducirá en la invariancia por la acción adjunta de \tilde{L} . La condición de invariancia necesaria para realizar la reducción $J^1C \rightarrow \Lambda^2 T^*M \otimes \text{ad}(P)$ vendrá dada por la invariancia bajo Z_1 y Z_2 . Estos son campos vectoriales sobre J^1C . Si comprobamos que son campos verticales, es decir, que al proyectarlos sobre $\Lambda^2 T^*M \otimes \text{ad}(P)$ se obtiene el cero del espacio tangente en cada punto, habríamos probado la condición necesaria. Si además la acción de Z_1 y de Z_2 cubre toda la fibra, como Ω es una submersión sobreyectiva, tendríamos también la condición suficiente.

Veamos primero que los campos son verticales. En primer lugar, elegimos φ^α tal que la única componente no nula es $\partial^2 \varphi^\alpha / \partial x^i \partial x^j$, para unos α, i, j determinados. Notamos que hay $mn(n+1)/2$ posibles elecciones. Entonces, la invariancia *gauge* implica

$$X_C^{(1)} L = \frac{\partial^2 \varphi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} \left(\frac{\partial L}{\partial A_{i,j}^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial A_{j,i}^\alpha} \right) = 0, \quad (16)$$

pues el resto de las componentes y de las derivadas de φ se anulan. Ahora bien, teniendo en cuenta la expresión local de la curvatura (15), si $L = \tilde{L} \circ \Omega$, el término entre paréntesis debe anularse idénticamente, en virtud de la antisimetría de Ω en los índices i, j en su dependencia en $A_{i,j}^\alpha$.

Ahora, supongamos que la única componente que no se anula es $\partial \varphi^\alpha / \partial x^i$ para unos α, i determinados. Notamos que en este caso hay mn elecciones posibles. La condición de invariancia *gauge* es:

$$\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial A_i^\alpha} + c_{\alpha\gamma}^\beta A_j^\gamma \frac{\partial L}{\partial A_{j,i}^\beta} \right) = 0. \quad (17)$$

Para comprobar esta condición es necesario trabajar de nuevo con (15). Supongamos que $j > i$. Si fuera al contrario, basta renombrar los índices para obtener lo mismo. Entonces,

$$\frac{\partial L}{\partial A_i^\alpha} = -c_{\alpha\gamma}^\lambda A_k^\lambda \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \Omega_{ik}^\gamma}, \quad \frac{\partial L}{\partial A_{j,i}^\beta} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \Omega_{j,i}^\beta},$$

de lo que se sigue inmediatamente que la condición de invariancia *gauge* se verifica. Esto demuestra que los campos Z_1 y Z_2 son verticales. Pero hemos visto que la acción por estos campos genera un espacio de dimensión $mn + mn(n+1)/2$. El Lema daba que esta era precisamente la dimensión

de las fibras $\Omega^{-1}(F_x)$, luego para que el lagrangiano sea invariante *gauge* deberá factorizar por la curvatura, $L = \tilde{L} \circ \Omega$.

Por último, veamos que la condición que impone la invariancia *gauge* por la acción de Z_0 es la invariancia por la acción adjunta de \tilde{L} . Si elegimos la transformación *gauge* de modo que sólo un φ^β es no nulo, la condición se escribe

$$\varphi^\beta \left(c_{\beta\gamma}^\alpha A_i^\gamma \frac{\partial L}{\partial A_i^\alpha} + c_{\beta\gamma}^\alpha A_{i,j}^\gamma \frac{\partial L}{\partial A_{i,j}^\alpha} \right) = 0.$$

Utilizando (17) y simplificando obtenemos

$$-c_{\beta\gamma}^\alpha A_i^\gamma c_{\alpha\rho}^\delta A_j^\rho \frac{\partial L}{\partial A_{j,i}^\delta} + c_{\beta\gamma}^\alpha A_{i,j}^\gamma \frac{\partial L}{\partial A_{i,j}^\alpha} = 0.$$

Reescribiéndolo en términos de las derivadas de \tilde{L} respecto de la imagen por la curvatura,

$$\left(c_{\beta\gamma}^\alpha A_i^\gamma c_{\alpha\rho}^\delta A_j^\rho - c_{\beta\gamma}^\alpha A_j^\gamma c_{\alpha\rho}^\delta A_i^\rho \right) \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \Omega_{ij}^\delta} + c_{\beta\gamma}^\alpha (A_{i,j}^\gamma - A_{j,i}^\gamma) \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \Omega_{ij}^\alpha} = 0.$$

A continuación, utilizamos la Identidad de Jacobi (1), que para las constantes de estructura se puede escribir como $c_{\beta\gamma}^\alpha c_{\alpha\rho}^\delta + c_{\rho\beta}^\alpha c_{\alpha\gamma}^\delta = -c_{\gamma\rho}^\alpha c_{\alpha\beta}^\delta$. Entonces, el primer término de la ecuación anterior se simplifica para obtener

$$c_{\rho\gamma}^\alpha c_{\alpha\beta}^\delta A_i^\gamma A_j^\rho \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \Omega_{ij}^\delta} + c_{\beta\gamma}^\alpha (A_{i,j}^\gamma - A_{j,i}^\gamma) \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \Omega_{ij}^\alpha} = 0.$$

Renombrando índices y utilizando de nuevo (15) obtenemos que la condición de invariancia *gauge* en este caso es

$$c_{\beta\gamma}^\alpha \Omega_{ij}^\gamma \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \Omega_{ij}^\alpha} = 0.$$

Ahora bien, el campo vectorial que genera la acción adjunta, X_{Ad} , generada por un elemento $\psi = \psi^\alpha B_\alpha$ de $\text{ad}(P) \sim \mathfrak{g}$ es

$$X_{Ad} \tilde{L} = [\psi^\beta, \tilde{L}] = c_{\beta\gamma}^\alpha \psi^\beta \Omega_{ij}^\gamma \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \Omega_{ij}^\alpha},$$

que es precisamente lo que hemos obtenido. \square

El resultado que ofrece el Teorema de Utiyama es que, para garantizar la invariancia *gauge*, es necesario que el lagrangiano factorice por la curvatura. Esto puede resultar completamente natural para algunos lectores pues la conexión no es un invariante *gauge*. De hecho, el Teorema de Utiyama se puede entender como una prueba de que la curvatura es el invariante *gauge* más sencillo que se puede construir a partir de la conexión, y que de hecho, todos los invariantes *gauge* deberán ser funciones de la curvatura que además sean invariantes por la acción adjunta.

Una de las hipótesis fundamentales que se está realizando es que el lagrangiano es una función que depende de primeras derivadas y no de derivadas de orden superior. Es posible plantearse entonces el problema de caracterización de lagrangianos invariantes *gauge*, $L : J^k C \rightarrow \mathbb{R}$. Se puede formular una extensión de este teorema para orden $k = 2$, cuya prueba sigue un esquema similar, y que se puede encontrar en [5].

4.2. Caracterización de Lagrangianos de modelos clásicos

Apliquemos el Teorema de Utiyama al caso del electromagnetismo, es decir, a un fibrado $M \times U(1) \rightarrow M$, donde el grupo de estructura $G = U(1)$ es abeliano. En este caso, sabemos que los lagrangianos deberán ser funciones de la curvatura. Además, al ser un grupo abeliano, la condición de invariancia por la acción adjunta es trivial. Por tanto, para el Teorema de Utiyama sería admisible cualquier función de la curvatura. Entonces, ¿qué tiene de especial el lagrangiano de Yang-Mills (11)?

Este es un problema de caracterización y, por tanto, para reducir la clase de lagrangianos admisibles será necesario imponer condiciones adicionales. No obstante, hay que ser cuidadoso con las condiciones que se imponen. Por ejemplo, podría ser natural, dado que el grupo *gauge* $\text{Gau}(P) \subset \text{Aut}(P)$ es un subgrupo del grupo de automorfismos, plantearse cuáles son los lagrangianos invariantes por los automorfismos de P . Es intuitivo observar que esto sería como exigir invariancia *gauge* y además, invariancia bajo difeomorfismos del espacio base M . En ese caso, se puede demostrar que los únicos lagrangianos admisibles están asociados a clases características [2], es decir, son de naturaleza puramente topológica y la acción es constante en \mathcal{C} .

Por tanto, si se quiere ver qué condiciones hay que imponer a los lagrangianos para que los únicos admisibles resulten ser los lagrangianos de Yang-Mills, que son los que parecen realizarse en los modelos tradicionales, se deberán exigir condiciones adicionales al Teorema de Utiyama, pero que no sean demasiado restrictivas. Si bien exigir invariancia por difeomorfismos del espacio base es excesivo, parece natural que una teoría lagrangiana respete la estructura causal que existe en la geometría base, y que viene dada por la acción de $O(n^+, n^-)$ sobre la misma, donde el espacio base es una variedad pseudo-riemanniana con signatura (n^+, n^-) . Esta condición puede interpretarse como una especie de invariancia Lorentz y el lagrangiano de Yang-Mills la verifica.

La segunda condición que se impone puede entenderse como una exigencia de simplicidad. Observamos que los lagrangianos de Yang-Mills son formas cuadráticas. Por lo tanto, la pregunta que debemos plantearnos es si existe algún otro lagrangiano que sea un polinomio de orden 2 en la curvatura, y que respete la acción de $O(n^+, n^-)$.

Para poder precisar el resultado, primero es necesario detallar bien qué significa invariancia Lorentz. Estamos asumiendo que el espacio base es una variedad pseudo-riemanniana, (M, g) con signatura (n^+, n^-) . Por tanto, podemos considerar el fibrado $L_g M \rightarrow M$, que es la $O(n^+, n^-)$ -reducción del fibrado de referencias $LM \rightarrow M$ (Ejemplo 2.28). Este fibrado tiene un grupo gauge $\text{Gau}(L_g M)$, dado localmente por las transformaciones $\Phi : L_g M \rightarrow L_g M$ que mandan $(x, y) \mapsto (x, \phi(x)y)$, con $\phi \in C^\infty(U, O(n^+, n^-))$ siendo U un abierto trivializable de M . Por tanto, la invariancia que buscamos exigir es la invariancia por la acción de este grupo *gauge*. En particular, como el Teorema de Utiyama garantiza que el lagrangiano se reduce a una función $\tilde{L} : \Lambda^2 T^* M \otimes \text{ad}(P) \rightarrow \mathbb{R}$, debemos exigir la invariancia por la acción inducida por $\text{Gau}(L_g M)$ sobre $\Lambda^2 T^* M$. Recordamos además que $T^* M$ y $\Lambda^2 T^* M$ son fibrados asociados a LM (equivalentemente a $L_g M$) con la acción por la izquierda de $GL(n, \mathbb{R})$ ($O(n^+, n^-)$) en $(\mathbb{R}^n)^*$ o en $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^*$. Así una transformación *gauge* de $L_g M$ se extiende a $\Lambda^2 T^* M$.

Teorema 4.4. Sea $P \rightarrow M$ un G -fibrado principal sobre una variedad pseudo-riemanniana (M, g) . Un lagrangiano polinómico de grado ≤ 2 , $\tilde{L} : \Lambda^2 T^* M \otimes \text{ad}(P) \rightarrow \mathbb{R}$ es invariante con respecto a la acción adjunta y es también invariante con respecto a la acción del grupo *gauge* de $L_g M$ en $\Lambda^2 T^* M$ si y solamente si toma la forma

$$\tilde{L}(\omega) = \lambda(x) + \mu_j(x)((\omega, \omega))^j, \quad (18)$$

para funciones arbitrarias $\lambda, \mu_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ y para

$$((v_1 \otimes \alpha_1, v_2 \otimes \alpha_2))^j = g(v_1, v_2)h^j(\alpha_1, \alpha_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \Lambda^2 T_x^* M, \alpha_1, \alpha_2 \in (\text{ad}P)_x, \quad (19)$$

donde h^j es una base del espacio vectorial (de dimensión finita) de las formas bilineales simétricas invariantes por la acción adjunta en \mathfrak{g} .

Demostración. La demostración de este resultado, en pleno grado de detalle, se puede encontrar en [1]. Aquí se presenta el esquema que sigue esta demostración, pero no se incluyen todos los detalles técnicos.

El punto de partida es el Teorema Fundamental del grupo ortogonal (ver [9]). Este resultado afirma que los invariantes tensoriales para la representación natural de $O(n^+, n^-)$ sobre \mathbb{R}^n son triviales, si son de orden impar, y los de orden par vienen dados por

$$\left[\bigotimes_{2k} \mathbb{R}^n \right]^{O(n^+, n^-)} = \text{Span}\{\hat{\sigma}(\theta \otimes \dots \otimes \theta) : \sigma \in S_{2k}\},$$

$$\theta = \sum_{p=1}^n \varepsilon_p e_p \otimes e_p, \quad \hat{\sigma}(v_1 \otimes \dots \otimes v_{2k}) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(2k)},$$

donde (e_1, \dots, e_n) es una base ortonormal con respecto a $O(n^+, n^-)$ y ε_p es el signo de la norma de e_p .

Una vez establecida esta caracterización, notamos que la acción *gauge* de $L_g M$ sobre $\Lambda^2 T^* M \otimes \text{ad}(P)$ actúa trivialmente sobre $\text{ad}(P)$. Además, el enunciado del Teorema es local, así que basta exigir la invariancia de los polinomios $P : \bigoplus^m \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \mathbb{R}$, donde $m = \dim(\mathfrak{g})$, donde el polinomio es de grado ≤ 2 .

Claramente, un polinomio será invariante si lo es cada una de sus componentes homogéneas. En este caso, un polinomio es homogéneo si es homogéneo de grado k_i en cada una de sus variables, donde su grado total es $k = k_1 + \dots + k_m$. Tal polinomio es un elemento de

$$P \in \bigotimes_{i=1}^m \left(S^{k_i}(\Lambda^2 \mathbb{R}^n) \right) \subset \bigotimes^q \mathbb{R}^n, \quad (20)$$

con $q = 2k$. El Teorema Fundamental del grupo ortogonal garantiza entonces que $P = \sum_{\sigma \in S_{2k}} \lambda_\sigma \hat{\sigma}(\theta \otimes \dots \otimes \theta)$. Como el grado total debe ser $k \leq 2$, existen dos posibilidades: o bien $q = 2$ o bien $q = 4$.

Si $q = 2$, debe ser $k = k_j = 1$ donde $k_i = 0$ si $i \neq j$. Entonces se tiene que $P = \theta$, que no está en el subespacio (20). El único caso restante es $q = 4$. En este caso, hay dos opciones: o bien $k = k_j + k_l = 2$, para $j \neq l$, y $k_i = 0$ en el resto de casos; o bien $k = k_j = 2$ para $k_i = 0$ si $i \neq j$. En el primero de los casos, el polinomio toma la forma

$$P = \sum_{\sigma \in S_4} A_\sigma \hat{\sigma} \left(\sum_{p,q=1}^n e_p \otimes e_p \otimes e_q \otimes e_q \right).$$

Ahora bien, para que esté en el subespacio definido en (20), necesariamente será de la forma $P = \lambda_{ab} \sum_{p,q=1}^n (e_p \wedge e_q) \otimes (e_p \wedge e_q)$, que es precisamente $P(\omega_1, \omega_m) = \lambda_{ab} \langle \omega^a, \omega^b \rangle$. No es difícil comprobar que esto mismo ocurre en el caso $k = k_j = 2$.

En conclusión, los únicos polinomios invariantes de orden ≤ 2 son, esencialmente, las formas bilineales simétricas y las constantes. Reescribiendo esto en términos de una base de las formas bilineales simétricas que respeten además la invariancia adjunta de \mathfrak{g} y teniendo en cuenta que la caracterización de la invariancia de los polinomios es válida punto a punto, se obtiene que los lagrangianos que verifican todas las condiciones de invariancia tienen la forma

$$\tilde{L}(\omega) = \lambda(x) + \mu_j(x) ((\omega, \omega))^j.$$

□

De la caracterización (18) no es evidente que sean, esencialmente, los lagrangianos de Yang-Mills. Por supuesto, el lagrangiano de Yang-Mills es de la forma (18), pero, de hecho, hay otros lagrangianos diferentes admisibles. Para estudiar esto es necesario caracterizar las posibles formas bilineales simétricas invariantes por la acción adjunta en un álgebra de Lie \mathfrak{g} .

En primer lugar, recordamos que si el álgebra de Lie es compleja y simple, toda forma bilineal invariante por la adjunta debe ser un múltiplo de la forma de Cartan-Killing. En estos casos, el único lagrangiano admisible es el de Yang-Mills, salvo por unos factores conformes $\lambda(x)$ y $\mu(x)$.

Si el álgebra de Lie \mathfrak{g} es simple y real, sólo existen dos posibilidades: o bien es una forma real de un álgebra de Lie compleja simple \mathfrak{g}_0 , en cuyo caso la única forma bilineal invariante por la acción adjunta es un múltiplo de la forma de Cartan-Killing heredada de \mathfrak{g}_0 ; o bien es isomorfa a un álgebra de Lie simple compleja, vista como real (su realificación), $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{R}} \simeq \mathfrak{g}$. En este caso, las formas bilineales invariantes por la adjunta se pueden escribir, en términos de la forma de Cartan-Killing en \mathfrak{g}_0 , como $(\langle \cdot, \cdot \rangle) = a\text{Re}(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{CK}}^{\mathfrak{g}}) + b\text{Im}(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{CK}}^{\mathfrak{g}})$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$. En este caso sí se pueden obtener formas bilineales diferentes a la de Cartan-Killing, como por ejemplo si se toma $b = 0$ con $a \neq 0$.

Por último, se puede demostrar que en el caso de un álgebra semi-simple, las formas bilineales invariantes por la adjunta se descomponen en combinaciones lineales de las formas bilineales invariantes por la adjunta de cada uno de los factores simples. Un caso representativo de esto viene dado en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.5 (Lagrangianos adaptados al Teorema 4.4 para $G = \text{Spin}(4)$). El grupo es semi-simple y se puede descomponer como $G = SU(2) \times SU(2)$. El álgebra $\mathfrak{su}(2)$ es una forma real del álgebra de Lie simple y compleja $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, por lo que las formas bilineales invariantes por la adjunta son, simplemente, la forma de Cartan-Killing, que denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entonces, las formas bilineales invariantes por la acción adjunta en $\text{Spin}(4)$ serán $a\langle \cdot, \cdot \rangle_1 + b\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Si se toma $a = b$ se obtiene precisamente el lagrangiano de Yang-Mills. No obstante, si se toma $a = -b$, se obtiene

$$L(j^1 A) = \lambda(x) + \mu(x) [g(F_A^2, F_A^5) - g(F_A^1, F_A^6) - g(F_A^3, F_A^4)], \quad (21)$$

donde $F_A = F_A^\alpha B_\alpha$, y $\{B_\alpha\}$ es una base ortonormal con respecto a la métrica de Cartan-Killing.

En cualquier caso, si olvidamos por un momento los factores $\lambda(x), \mu(x)$, la elección de una forma bilineal u otra es, en cierto modo irrelevante. En la obtención de las ecuaciones de movimiento se hace uso de (12), que es una relación válida para cualquier forma bilineal invariante por la acción adjunta y no degenerada. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para cualquier lagrangiano de la forma $L = ((F_A, F_A))_{(g,h)}$ son $\star d \star dA = 0$, independientemente de la forma concreta de h .

En resumidas cuentas, es posible caracterizar completamente los lagrangianos admisibles para una teoría *gauge*. El teorema de Utiyama asegura que la invariancia *gauge* exige que la dependencia en la conexión aparezca a través de la curvatura. Si además requerimos la condición de la invariancia por el grupo *gauge* asociado al fibrado de referencias ortonormales (algo compatible con la invariancia relativista), y la condición física de que se obtenga una dependencia de segundo grado en la curvatura (en las velocidades asociadas a la conexión, podría decirse), se obtiene que los lagrangianos deben tomar, precisamente, la forma de Yang-Mills, o una forma muy similar que resulta en unas ecuaciones del movimiento equivalentes. De esta manera, matemáticamente se ha obtenido que el hecho de que los modelos que se utilizan para describir la naturaleza se comporten en muchos casos de acuerdo a teorías de Yang-Mills no es arbitrario, sino que no podría haber sido de otra manera.

Referencias

- [1] M. Castrillón López and J. Muñoz Masqué. Gauge-invariant characterization of Yang–Mills–Higgs equations. In *Annales Henri Poincaré*, volume 8, page 203. <http://link.springer.com>, 2007.
- [2] M. Castrillón López, J. Muñoz Masqué, and T. S. Ratiu. Trivial lagrangians on connections and invariance under automorphisms. In *Steps in differential geometry*, page 77. Institute of Mathematics and Informatics, 2001. Proceedings of the Colloquium on Differential Geometry held in Debrecen, July 25-30, 2000.
- [3] M. Castrillón López and V. Muñoz Velázquez. Bundles, 2011.
- [4] M. Castrillón López and V. Muñoz Velázquez. Bundles and gauge theories, 2012.
- [5] R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo, and P. J. Pompeia. Second order gauge theory. *Annals of Physics*, 322:1211, 2007.
- [6] S. K. Donaldson. An application of gauge theory to four-dimensional topology. *Journal of Differential Geometry*, 18:279, 1983.
- [7] J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk. *Lie groups*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] P. L. García. Gauge algebras, curvature and symplectic structure. *Journal of Differential Geometry*, 12:209, 1977.
- [9] R. Goodman and N. R. Wallach. *Representations and invariants of the classical groups*. Cambridge University Press, 2000.
- [10] A. Kirillov Jr. *An introduction to Lie groups and Lie algebras*. Number 113. Cambridge University Press, 2008.
- [11] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. CRC press, 2003.
- [12] N. Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton university press, 2016.
- [13] R. Utiyama. Invariant theoretical interpretation of interaction. *Physical Review*, 101:1597, 1956.
- [14] E. P. Wigner. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. In *Mathematics and Science*, page 291. World Scientific, 1990.
- [15] T. T. Wu and C. N. Yang. Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. *Physical Review D*, 12:3845, 1975.