

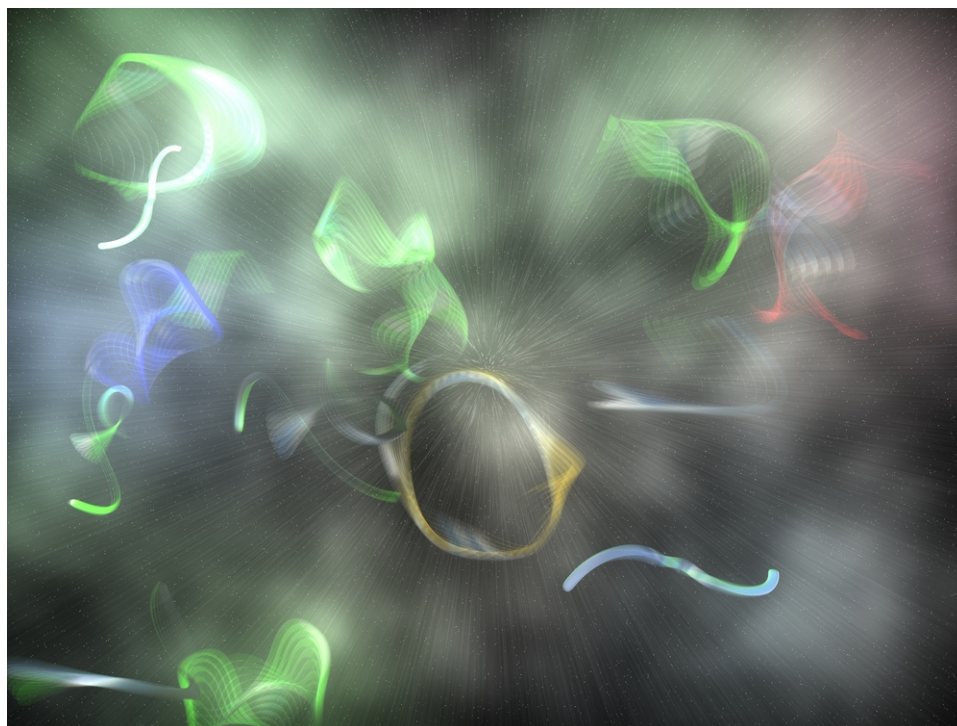
TRABAJO DE ESPECIALIZACIÓN

---

# TEORÍA CLÁSICA DE CUERDAS

---

Enero de 2021



Jaime Redondo-Yuste  
Facultad de Ciencias Físicas  
Universidad Complutense de Madrid  
[jairedon@ucm.es](mailto:jairedon@ucm.es)

# 1 Introducción

La teoría de cuerdas ha supuesto uno de los mayores esfuerzos en la física en los últimos años. Esencialmente, se reduce a un cambio de paradigma en el nivel más fundamental, al considerar como elementos fundamentales de la teoría, reemplazando a la partícula puntual de la mecánica clásica, unos objetos uni-dimensionales, denominados cuerdas. Bajo este cambio de perspectiva, se puede recuperar tanto el electromagnetismo (y en general las teorías gauge de tipo Yang-Mills) y la relatividad general. Pero además la teoría de cuerdas es en sí misma una teoría cuántica, de modo que supone en cierto modo una teoría cuántica de gravedad. No obstante, para conseguirlo es necesario introducir dimensiones adicionales, de las que no tenemos ninguna evidencia observacional, y que por tanto aparecen compactificadas en la teoría.

Este problema de compactificación podría resultar devastador para la teoría de cuerdas, ya que desde el punto de vista fenomenológico no se ofrecen evidencias experimentales directas, al margen de la supersimetría, que todavía no se ha observado. No obstante, algunos avances de los últimos años han sido esenciales para mantener el impulso en la investigación en cuerdas. Por un lado, en un contexto cosmológico las cuerdas cósmicas [1] podrían ofrecer predicciones interesantes, aunque la naturaleza de estos objetos pueda diverger con respecto a las cuerdas tal y como se entienden en la teoría de cuerdas pura [2]. También muy interesante es la correspondencia AdS/CFT [3, 4] ya que proporciona un entorno donde estudiar las consecuencias de una teoría de gravedad cuántica, si bien no la que se realiza en la naturaleza.

Aunque la teoría de cuerdas es en sí misma una teoría cuántica, se pueden entender algunos de sus ingredientes básicos desde la teoría clásica. El objetivo de este trabajo es realizar una descripción completa del paradigma de las cuerdas desde el punto de vista de la teoría clásica, siguiendo principalmente [5, 6], en las secciones 2. Finalmente, esta teoría clásica se puede extender a complejos branales en una bonita teoría desarrollada por Brandon Carter [7, 8, 9], que se introducirá brevemente en la sección 3.

## 2 Teoría Clásica de Cuerdas

Es conveniente empezar revisando la formulación lagrangiana de una partícula relativista. Una partícula moviéndose en un espaciotiempo de  $D$  dimensiones,  $\mathcal{M}^D$ , dotado con la métrica de Minkowski, con la elección de signatura dada por  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$  se puede describir por la acción

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu}, \quad (1)$$

donde se ha tomado  $c = 1$  en la expresión anterior y se usarán estas unidades de aquí en adelante. Esta acción se obtiene al exigir que el sistema sea invariante bajo reparametrizaciones internas  $\tau \rightarrow \tilde{\tau}(\tau)$  y bajo transformaciones de Lorentz,  $X^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu X^\nu + \alpha^\mu$ , donde  $\Lambda$  es una transformación del grupo de Lorentz  $SO(D-1, 1)$ . Aunque esta acción cumple ambos requisitos, es problemática por dos razones. En primer lugar, no puede describir partículas sin masa. En segundo lugar, la raíz cuadrada en el lagrangiano complica las ecuaciones del movimiento, y en particular luego resulta muy problemática a la hora de cuantizar la teoría. Ambos problemas se pueden solventar introduciendo un campo auxiliar, una *einbein*,  $e(\tau)$ , de modo que la acción sea

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \left( \frac{1}{e} \dot{X}^2 - em^2 \right). \quad (2)$$

Esta acción se puede interpretar como el acomplamiento de la partícula con la métrica que se induciría en su trayectoria, si tomamos  $e = \sqrt{-g_{\tau\tau}}$ , y  $g_{\tau\tau}$  es la única componente de la métrica inducida en la trayectoria (viendo la trayectoria como subvariedad dentro de la variedad original  $\mathcal{M}^D$ ). No es complicado demostrar que esta acción proporciona las mismas ecuaciones del movimiento que la anterior. Además, la invariancia Poincaré sigue intacta, pues todas las cantidades involucradas en la acción no dependen de las coordenadas escogidas. Faltaría comprobar la invariancia bajo reparametrizaciones temporales, no obstante, si tomamos una transformación infinitesimal  $\tau \rightarrow \tau - \tilde{\tau}(\tau)$ , y elegimos que la einbein se transforme como

$$\delta e = \frac{d}{d\tau}(\tilde{\tau}(\tau)e), \quad (3)$$

entonces se comprueba que la acción 2 mantiene la invariancia bajo reparametrizaciones. Por tanto, se obtiene una acción que mantiene lo deseado de la acción original, pero que además puede describir partículas sin masa y cuyas ecuaciones del movimiento son más sencillas, lo que simplifica su cuantización.

Este esquema referente a la partícula libre se puede extender para describir la acción de una cuerda. Una cuerda será descrita por una inmersión  $(\tau, \sigma) \rightarrow X^\mu(\tau, \sigma)$ , donde  $\tau$  es el parámetro de género tiempo (es decir, su campo vectorial tangente es de género tiempo) y  $\sigma \in [0, 2\pi)$  es el parámetro de género espacio, y ambos parametrizan la hoja de universo en la que se mueve la cuerda.

Al igual que en el caso de la partícula relativista, queremos obtener una acción para este objeto que sea invariante bajo reparametrizaciones temporales y bajo transformaciones de Poincaré. En el caso de una partícula, esto se conseguía tomando la acción proporcional a la longitud de la línea de universo que recorría la partícula. Por tanto, parece natural tomar la acción proporcional al área de la hoja de universo que barre la cuerda. Para medir el área de la hoja de universo se tiene en cuenta la métrica inducida en ella por la métrica de Minkowski del espacio ambiente, vía pullback por la

inmersión,  $\gamma = X^*\eta$ , donde  $\eta$  es la métrica de Minkowski y  $X^*$  es el pullback por la inmersión  $X : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathcal{M}^D$ . En coordenadas

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} \eta_{\mu\nu}, \quad (4)$$

con  $\alpha, \beta = 0, 1$  y  $\xi^0 = \tau$ ,  $\xi^1 = \sigma$ . Entonces la acción pasa a ser

$$S = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det\gamma}. \quad (5)$$

Esta acción es la conocida como **Acción de Nambu-Goto**. Claramente el área de una subvariedad no depende de la parametrización escogida, así que se mantiene la invariancia Lorentz y la invariancia bajo reparametrizaciones internas. La constante de la proporcionalidad  $T$  se puede entender como una tensión, lo cual tiene sentido al estar tratando de cuerdas. Para verlo, conviene realizar un pequeño ejercicio de análisis dimensional:

La acción tiene unidades de momento angular, y el área tendrá integrales de longitud multiplicada por tiempo, por tanto,  $[T] = E/l$ , lo cual son unidades de una tensión. Es habitual escribir  $T = 1/(2\pi\alpha')$ . En unidades de masa,  $[X] = -1$ , por tanto,  $[T] = 2$  así que  $[\alpha'] = -2$ . Así, podemos asociar una longitud característica de la cuerda como  $\alpha' = l_s^2$ , que es la longitud natural de la cuerda que estamos describiendo.

Desarrollando el determinante, la acción se puede escribir explícitamente como

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-(\dot{X})^2(X')^2 + (\dot{X}X')^2}, \quad (6)$$

donde  $X' = dX/d\sigma$  y  $\dot{X} = dX/d\tau$ , y en ausencia de índices,  $XY = X^\mu Y^\nu \eta_{\mu\nu}$ . Los momentos conjugados son

$$\Pi_\mu^\tau = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = -T \frac{(\dot{X}X')X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2(X')^2}}, \quad (7)$$

$$\Pi_\mu^\sigma = \frac{\partial L}{\partial (X')^\mu} = -T \frac{(\dot{X}X')\dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2(X')^2}}, \quad (8)$$

y las ecuaciones del movimiento de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \Pi_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \Pi_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0. \quad (9)$$

Si tenemos en cuenta que las variaciones del determinante con respecto a la métrica son  $\delta\sqrt{-\det\gamma} = 1/2\sqrt{-\det\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \delta\gamma_{\alpha\beta}$ , las ecuaciones del movimiento se escriben del principio variacional en una forma mucho más compacta, como

$$\partial_\alpha \left( \sqrt{-\det\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu \right) = 0. \quad (10)$$

Esta forma de las ecuaciones del movimiento puede motivar introducir una acción con unas ecuaciones equivalentes, de modo similar a como se introducía la einbein para una partícula relativista. Esta es la **Acción de Polyakov**, que toma la forma

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad (11)$$

Se ha introducido un campo adicional,  $g_{\alpha\beta}$ , que podría interpretarse como la métrica efectiva en la hoja de universo en la que se mueve la cuerda. Para simplificar la notación,  $g = \det g$ . Para esta acción, la ecuación del movimiento obtenida por variaciones respecto a  $X^\mu$  es

$$\partial_\alpha \left( \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu \right) = 0, \quad (12)$$

que es la misma ecuación que se había obtenido previamente, con  $g^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta}$ . El campo  $g$  quedará fijada por la ecuación del movimiento restante. Se obtiene

$$\delta S = -\frac{1}{8\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \left( \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\rho\lambda} \partial_\rho X^\mu \partial_\lambda X^\nu \right) \eta_{\mu\nu} = 0, \quad (13)$$

y no es difícil ver que la solución se puede escribir en general como

$$g_{\alpha\beta} = 2f(\tau, \sigma) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad f(\tau, \sigma)^{-1} = g^{\rho\lambda} \partial_\rho X^\mu \partial_\lambda X^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad (14)$$

Se obtiene que el campo  $g$  es la métrica inducida por el pullback en la hoja de universo salvo por un factor conforme  $f$ . No obstante, se puede comprobar que este factor conforme no altera la acción, lo cual significa que hemos obtenido una simetría adicional.

Con respecto a las simetrías, la acción de Polyakov mantiene la invariancia bajo transformaciones de Poincaré (es manifiestamente covariante), y bajo difeomorfismos. Para ver esto último, si  $\sigma^\alpha \rightarrow \tilde{\sigma}^\alpha(\sigma) = \sigma^\alpha + \xi^\alpha$ , entonces

$$\delta X^\mu = \xi^\alpha \partial_\alpha X^\mu, \quad \delta g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha, \quad (15)$$

donde  $\nabla$  es la derivada covariante asociada a la conexión de Levi-Civita en la hoja de universo de la cuerda con la métrica  $g$ . Con estas transformaciones se puede comprobar la invariancia. Por último, si se toman transformaciones  $g_{\alpha\beta} \rightarrow \Omega^2(\tau, \sigma) g_{\alpha\beta}$  (que infinitesimalmente es  $\delta g_{\alpha\beta} = 2\phi(\tau, \sigma) g_{\alpha\beta}$ , donde  $\Omega^2 = e^{2\phi}$ ), también hay invariancia. Esta simetría se conoce como simetría Weyl, y es una invariancia bajo reescalados locales. Es especialmente interesante porque sólo está presente para cuerdas. En efecto, para partículas puntuales no es una simetría del sistema, y se puede comprobar que la generalización de la acción de Polyakov para objetos de dimensiones superiores ( $d$ -branas) no son invariantes bajo transformaciones de Weyl. Esto es una de las causas del especial interés por las cuerdas frente a otros sistemas.

Las transformaciones de Weyl se pueden entender como transformaciones gauge, y por tanto, se tiene libertad para fijar el gauge que más conveniente sea para simplificar las ecuaciones del movimiento. Un resultado de geometría diferencial muestra que toda métrica en una superficie bidimensional es conformemente plana. Tomando el factor conforme como unidad, podemos escoger  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ . Este es conocido como el gauge conforme. Entonces, las ecuaciones del movimiento son

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0, \quad (16)$$

$$\dot{X} X' = 0, \quad (17)$$

$$\dot{X}^2 + (X')^2 = 0. \quad (18)$$

La primera se entiende como la ecuación del movimiento propiamente dicha, que es simplemente la ecuación de onda libre. Las otras dos ecuaciones aparecen de la ecuación de Euler-Lagrange para  $g_{\alpha\beta}$ , y se entienden como ligaduras del sistema. La primera de las ligaduras significa simplemente que las líneas de  $\sigma$  constante son perpendiculares a las líneas de  $\tau$  constante, es decir, que las oscilaciones son transversales. La segunda ligadura, con un poco más de trabajo se puede comprobar que relaciona la velocidad de oscilación de la cuerda con su longitud, vista en un cierto sistema de referencia.

Para resolver la ecuación del movimiento es conveniente trabajar en coordenadas del cono de luz,  $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$ , de modo que la ecuación del movimiento es  $\partial_+ \partial_- X^\mu = 0$ , así que la solución se escribe como  $X^\mu = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-)$ , en términos de modos que se mueven hacia la izquierda o hacia la derecha, respectivamente.

Para resolver completamente la ecuación del movimiento debemos imponer algunas condiciones de frontera. Estas condiciones son las que diferencian entre cuerdas cerradas o abiertas. La discusión para cuerdas abiertas es ligeramente más complicada así que conviene tratar en primer lugar cuerdas cerradas (lazos), para los cuales la condición de frontera es  $X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$ . Entonces, la solución de la ecuación se puede obtener en términos de una expansión en modos,

$$X_L^\mu = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha' p^\mu \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^+}, \quad (19)$$

$$X_R^\mu = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha' p^\mu \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-}. \quad (20)$$

Se puede comprobar que  $x^\mu$  es la posición del centro de masas de la cuerda, y que  $p^\mu$  es el momento del centro de masas, entendido como la corriente Noether asociada a las traslaciones  $X^\mu \rightarrow X^\mu + \xi^\mu$ . Para que todo sea real se debe imponer además  $\alpha_n^\mu = (\alpha_{-n}^\mu)^*$ , y similarmente para  $\tilde{\alpha}$ .

Las ligaduras, en coordenadas del cono de luz son

$$(\partial_+ X)^2 = (\partial_- X)^2 = 0, \quad (21)$$

por lo que utilizando la expansión en modos, se traducen en

$$L_n = \tilde{L}_n = 0, \quad L_n = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m} \alpha_m, \quad \tilde{L}_n = \frac{1}{2} \sum_m \tilde{\alpha}_{n-m} \tilde{\alpha}_m. \quad (22)$$

Es importante para la cuantización posterior de la teoría conocer cuál es el álgebra de las ligaduras. Hemos obtenido que las ligaduras están generadas por los modos de Fourier  $L_m$  y  $\tilde{L}_m$ . Entonces, basta obtener sus constantes de estructura a partir de calcular sus corchetes de Poisson para conocer el álgebra de Lie que generan. El cálculo es directo y se obtiene

$$\{L_m, L_n\} = -i(m-n)L_{m+n}, \quad (23)$$

$$\{\tilde{L}_m, \tilde{L}_n\} = -i(m-n)\tilde{L}_{m+n}, \quad (24)$$

$$\{L_m, \tilde{L}_n\} = 0. \quad (25)$$

El álgebra generada entonces son dos copias idénticas del álgebra de Witt [10]. El álgebra de Witt es simplemente el álgebra de Lie asociada al grupo de difeomorfismos de la circunferencia. En efecto, una transformación infinitesimal en la circunferencia es  $\theta \rightarrow \theta + a(\theta)$ , y sus generadores son  $D_n = ie^{in\theta} d/d\theta$ . Entonces es trivial calcular que  $[D_n, D_m] = -i(m-n)D_{n+m}$ . A la hora de cuantizar la teoría es conveniente tomar la extensión central del álgebra de ligaduras, que para el caso del álgebra de Witt es el álgebra de Virasoro. Por eso, a los modos  $L_n$  se les conoce como modos de Virasoro.

Con esto, el tratamiento de la cuerda cerrada libre queda completo, su movimiento descrito por las ecuaciones 19 junto con la ligadura para los modos de Virasoro. El tratamiento para la cuerda abierta no es mucho más complejo, pero introduce cuestiones interesantes. Si escribimos por simplicidad

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \partial_\alpha X \partial^\alpha X, \quad (26)$$

y tomamos variaciones con respecto a  $X$ , obtenemos

$$\delta S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \delta X \left( \partial^\alpha \partial_\alpha X + \frac{d(\dot{X})}{d\tau} - \frac{dX'}{d\sigma} \right), \quad (27)$$

es decir, la ecuación del movimiento y dos derivadas totales. La primera de ellas siempre se anula, porque tomamos variaciones  $\delta X = 0$  en  $\tau = \tau_{ini}, \tau_{fin}$ . Si queremos obtener las ecuaciones del movimiento anteriores, la segunda derivada total también debe anularse por las condiciones de frontera. Una forma de hacer esto eran las condiciones periódicas que hemos usado para

la cuerda cerrada, pero no es la única forma. Que se anule ese término es equivalente a que

$$\partial_\sigma X^\mu \delta X_\mu = 0, \quad \sigma = 0, \pi, \quad (28)$$

donde ahora  $\sigma \in [0, \pi)$  es el convenio habitual para tratar cuerdas abiertas. Hay esencialmente dos modos de anular esa ecuación: o bien  $\delta X^\mu = 0$  (condiciones de Dirichlet), o bien  $\partial_\sigma X^\mu = 0$  (condiciones de Neumann).

El modo más general de considerar entonces una cuerda abierta es introduciendo las condiciones de frontera

$$\partial_\sigma X^a = 0, \quad a = 0, \dots, p \quad (29)$$

$$X^I = c^I, \quad I = p + 1, \dots, D - 1. \quad (30)$$

Físicamente, se tiene una cuerda con los extremos fijos a una  $(p + 1)$ -hipersuperficie, que se conoce como una  $p$ -brana, pero que los extremos se pueden mover libremente por la brana. Esto se corresponde con la descomposición  $SO(1, D - 1) = SO(1, p) \times SO(D - p - 1)$ . Entonces, la expansión en modos debe ser

$$X_L^\mu = \frac{1}{2}x^\mu + \alpha' p^\mu \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^+}, \quad (31)$$

$$X_R^\mu = \frac{1}{2}x^\mu + \alpha' p^\mu \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-}, \quad (32)$$

donde se elimina un factor  $1/2$  para mantener a  $p^\mu$  como la corriente Noether asociada a las traslaciones. Las condiciones de frontera ahora imponen

$$\alpha_n^a = \tilde{\alpha}_n^a, \quad (33)$$

$$\alpha_n^I = -\tilde{\alpha}_n^I, \quad x^I = c^I, \quad p^I = 0. \quad (34)$$

Se puede ver que los modos  $\tilde{\alpha}$  quedan unívocamente determinados por los modos  $\alpha$ . Por tanto, las ligaduras son simplemente  $L_n = 0$ , y se obtiene una única copia del álgebra de Witt.

Para completar el tratamiento de la cuerda abierta, se puede considerar que la brana a la que está sujeta la cuerda es también un objeto dinámico. Siguiendo la misma prescripción que para la partícula relativista o para la cuerda, podemos plantear que la acción de la brana es

$$S_p = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-h}, \quad h_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} \eta_{\mu\nu}, \quad (35)$$

es decir, la acción es proporcional al volumen de la  $(p + 1)$ -hoja de universo de la  $p$ -brana.



### 3 Complejos Branales

El tratamiento de sistemas de branas y cuerdas acoplados es notablemente más complejo, en general. No obstante, desde el punto de vista clásico se puede tratar una teoría muy interesante para complejos branales. Un complejo branal es una colección de  $d$ -branas (donde una 0-brana es una partícula puntual y una 1-brana es una cuerda), en el cual sólo exigimos que el soporte de cada brana es de género tiempo y que la frontera de cada brana es una colección finita de soportes de branas de dimensión inferior del complejo. Esto, que puede aparentar ser muy abstracto, no es más que una generalización de las características que verifica una vela de un barco. En efecto, la vela es en sí misma una membrana, es decir, una 2-brana, sujeta por varias cuerdas unidas entre sí o con otras cuerdas que la sujeten al barco por nudos, mosquetones o poleas que consideramos como partículas puntuales. El viento, además, se puede modelar como una 3-brana, o también se podría modelar como un campo de Ramond de dos índices. La acción de un complejo branal quedaría caracterizada por

$$\mathcal{I} = \sum_d \int {}^{(d)}dS {}^{(d)}L, \quad {}^{(d)}dS = \sqrt{-{}^{(d)}\gamma} d^d\sigma, \quad (36)$$

donde  ${}^{(d)}\gamma$  es la métrica inducida en la hoja de universo de cada  $(d-1)$ -brana. Además, se puede admitir que los lagrangianos tengan acoplos de la siguiente manera:

1. De las variables internas de cada  $d$ -brana con las variables internas de las  $(d-1)$ -branas adyacentes.
2. Acoplo pasivo con la gravedad del fondo  $D$ -dimensional a través del campo  $g_{\mu\nu}$  (en la derivación anterior habíamos tomado  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ).
3. También se pueden considerar campos externos de naturaleza electromagnética (es decir, un potencial  $A_\mu$  que se puede interpretar como una conexión en un  $U(1)$ -fibrado principal y con curvatura  $F = dA$  antisimétrica), y en general, con campos de Ramond. Estos campos vienen dados por una  $r$ -forma gauge  $A_{\mu\nu\dots}^{\{r\}}$  antisimétrica con derivada exterior  $F_{\mu\nu\rho}^{\{r+1\}} = (r+1)\nabla_{[\mu}A_{\nu\rho\dots]}^{\{r\}}$  cerrada, donde el corchete significa antisimetrización en los índices que envuelve. El campo de Ramond es invariante bajo una transformación gauge de tipo Kalb-Ramond,  $A_{\mu\nu\dots}^{\{r\}} \rightarrow A_{\mu\nu\dots}^{\{r\}} + r!\nabla_{[\mu}\xi_{\nu\dots]}$ . Es interesante el caso de un campo de Ramond de índice  $r=2$  en un fondo de cuatro dimensiones, pues entonces la derivada exterior, al ser totalmente antisimétrica, será simplemente  $F_{\mu\nu\rho} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}n^\sigma$ , y la condición de que sea cerrada es  $\nabla_\mu n^\mu = 0$ . Esto significa que este campo realmente es equivalente a un fluido moviéndose con vector  $n^\mu$  que se conserva.

Además, todas las contribuciones a la acción deben ser invariantes gauge, y no se admiten acoplos a  $\nabla g$ . Bajo perturbaciones en los campos externos,

$$\delta\mathcal{I} = \sum_d \int^{(d)} dS \left( {}^{(d)}j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{r!} {}^{(d)}j_{\{r\}}^{\mu\nu\dots} \delta {}^{(d)}A_{\mu\nu\dots}^{\{r\}} + \frac{1}{2} {}^{(d)}T^{\mu\nu} \delta {}^{(d)}g_{\mu\nu} \right), \quad (37)$$

donde

$${}^{(d)}j^\mu = \frac{\partial {}^{(d)}L}{\partial A_\mu}, \quad {}^{(d)}j_{\{r\}}^{\mu\nu\dots} = \frac{\partial {}^{(d)}L}{\partial A_{\mu\nu\dots}^{\{r\}}}, \quad (38)$$

$${}^{(d)}T^{\mu\nu} = 2 \frac{\partial {}^{(d)}L}{\partial g_{\mu\nu}} + {}^{(d)}L {}^{(d)}\eta^{\mu\nu}, \quad (39)$$

de forma que las  $j$  son las corrientes asociadas al campo electromagnético y de Ramond, y  $T^{\mu\nu}$  es el tensor energía momento, con  $\eta^{\mu\nu} = \gamma^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu$  es el primer tensor fundamental en cada  $(d-1)$ -brana, siendo  $\gamma_{ij}$  la métrica inducida por la métrica ambiente en la hoja de universo de la brana. Ahora, podemos exigir la invariancia gauge, es decir, si  $\delta A_\mu = \nabla_\mu \alpha$  y  $\delta A_{\mu\nu\dots}^{\{r\}} = r! \nabla_{[\mu} \chi_{\nu\dots]}$  (ponemos  $\delta g_{\mu\nu} = 0$  porque la invariancia bajo difeomorfismos para el campo gravitatorio se trata de una forma distinta) entonces  $\delta\mathcal{I} = 0$ . Imponiendo esto se llega a que las corrientes son tangenciales a cada hipersuperficie, i.e.,

$${}^{(d)}\perp_\nu^\mu {}^{(d)}j^\nu = 0, \quad {}^{(d)}\perp_\nu^\mu {}^{(d)}j_{\{r\}}^{\nu\rho\dots} = 0, \quad (40)$$

donde  $\perp_\nu^\mu = g_\nu^\mu - \eta_\nu^\mu$  es la proyección ortogonal sobre cada hipersuperficie. Descomponiendo la derivada como  $\nabla_\mu = \bar{\nabla}_\mu + \perp_\mu^\nu \nabla_\nu$  y aplicando el Teorema de Green en cada hipersuperficie, se puede obtener que las corrientes verifican una ley de conservación,

$${}^{(p)}\bar{\nabla}_\mu {}^{(p)}j^\mu = \sum_{d=p+1}^{(d)} \lambda_\mu {}^{(d)}j^\mu, \quad (41)$$

$${}^{(p)}\bar{\nabla}_\mu {}^{(p)}j_{\{r\}}^{\mu\nu\dots} = \sum_{d=p+1}^{(d)} \lambda_\mu {}^{(d)}j_{\{r\}}^{\mu\nu\dots}, \quad (42)$$

donde  ${}^{(d)}\lambda_\mu$  son vectores unitarios tangentes a cada superficie apuntando hacia afuera (la orientación viene por la libertad en la elección de la convención al aplicar el Teorema de Green), y la suma ha de entenderse como sobre cada hipersuperficie de dimensión  $d = p + 1$  que está en contacto con la  $p$ -hipersuperficie. Se ve claramente que esto es una ley de conservación, como podría esperarse.

Se puede hacer lo mismo, pero tomando variaciones con respecto a un sistema de referencia fijo, variaciones que se denominan Eulerianas en [8]. El procedimiento requiere algunos cálculos adicionales, pero se acaba obteniendo una generalización de la Segunda Ley de Newton,

$${}^{(p)}T^{\mu\nu} {}^{(p)}K_{\mu\nu}^\rho = {}^{(p)}\perp_\mu^\rho {}^{(p)}f^\mu, \quad (43)$$

donde  $T^{\mu\nu}$  juega el papel de masa,  $K_{\mu\nu}^\rho = \eta_\nu^\alpha \bar{\nabla}_\mu \eta_\alpha^\rho$  es el segundo tensor fundamental y juega el papel de aceleración, y el término  $f^\mu$  recoge todas las contribuciones a la fuerza:

$${}^{(p)}f^\mu = \sum_{d=p+1} {}^{(d)}\lambda_\mu {}^{(d)}T_\rho^\mu + {}^{(p)}F_{\mu\rho} {}^{(p)}j^\rho + \frac{1}{r!} {}^{(p)}F_{\rho\mu\nu\dots}^{\{r+1\}} j_{\{r\}}^{\mu\nu\dots}, \quad (44)$$

de izquierda a derecha: la contribución de las fuerzas de contacto, la fuerza de Lorentz y una fuerza de tipo Joukowski debida al campo de Ramond. Esto se discute en más detalle en la ecuación (86) y consiguientes en [7]. Aunque, por brevedad, no se recoge aquí la derivación en detalle, esta descripción es sorprendente por la simplicidad conceptual, por la compacidad de las ecuaciones resultantes, y por sus implicaciones, por ejemplo, a la hora de describir agujeros negros en dimensiones superiores [11].

## 4 Conclusiones

La teoría de cuerdas puede resultar ser o no una teoría que describa en un nivel más fundamental el universo en el que vivimos. En cualquier caso es innegable que su estudio ha significado notables avances en diversas ramas de la física y también de las matemáticas. En estas notas se ha presentado la descripción clásica de la dinámica libre de cuerdas abiertas y cerradas. Dentro del paradigma clásico se obtiene de forma natural la simetría Weyl como una invariancia de la acción de Polyakov, así como el álgebra de Witt como el álgebra de las ligaduras, ambos ingredientes fundamentales posteriormente en la cuantización de la teoría. La descripción no requiere de ingredientes adicionales a los cursados en la asignatura de Mecánica Clásica y permite una descripción completa de la teoría libre, obteniendo soluciones a las ecuaciones del movimiento en términos de su expansión en modos. Por último, se ha introducido brevemente la teoría de complejos branales como una generalización del paradigma de cuerdas clásicas descrito anteriormente. Con el lenguaje que se ha introducido es posible, simplemente tomando variaciones de la acción y exigiendo invariancia gauge, obtener una generalización de la segunda Ley de Newton para sistemas mucho más complejos, que permiten tratar tanto objetos exóticos como sistemas mucho más realistas como el ejemplo de la vela de un barco impulsada por el viento.

## References

- [1] Alexander Vilenkin. Cosmic strings and domain walls. *Physics reports*, 121(5):263–315, 1985.
- [2] Joseph Polchinski. Introduction to cosmic f-and d-strings. In *String theory: From gauge interactions to cosmology*, pages 229–253. Springer, 2005.
- [3] Juan Maldacena. The large-n limit of superconformal field theories and supergravity. *International journal of theoretical physics*, 38(4):1113–1133, 1999.
- [4] Ofer Aharony, Steven S Gubser, Juan Maldacena, Hiroshi Ooguri, and Yaron Oz. Large n field theories, string theory and gravity. *Physics Reports*, 323(3-4):183–386, 2000.
- [5] Joseph Polchinski. *String theory: Volume 1, an introduction to the bosonic string*. Cambridge university press, 1998.
- [6] David Tong. Lectures on string theory. *arXiv preprint arXiv:0908.0333*, 2009.
- [7] Brandon Carter. Essentials of classical brane dynamics. *International Journal of Theoretical Physics*, 40(12):2099–2129, 2001.
- [8] Brandon Carter. Symplectic structure in brane mechanics. *International Journal of Theoretical Physics*, 42(6):1317–1327, 2003.
- [9] Brandon Carter. Classical dynamics of strings and branes, with application to vortons. *arXiv preprint arXiv:1112.2094*, 2011.
- [10] Aleksandr A Kirillov. *Representation Theory and Noncommutative Harmonic Analysis I: Fundamental Concepts. Representations of Virasoro and Affine Algebras*. Springer, 1994.
- [11] Roberto Emparan and Harvey S Reall. Black holes in higher dimensions. *Living Reviews in Relativity*, 11(1):6, 2008.